

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 2 (1956)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** L'ANALYSE HARMONIQUE DANS LES GROUPES ABÉLIENS  
**Kapitel:** § 5. La théorie de la dualité.  
**Autor:** Braconnier, Jean  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32889>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 08.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

c) Comme  $L^2(G) \subset L^1(G)$ ,  $F$  est un isomorphisme de l'espace hilbertien  $L^2(G)$  sur  $L^2(\hat{G})$ ; le réciproque de  $F$  est le prolongement de  $F'$  à  $L^2(\hat{G})$ ; c'est l'application qui à  $f' \in L^2(\hat{G})$  fait correspondre la fonction  $x \rightarrow \sum_{\hat{x}} \langle x, \hat{x} \rangle f'(\hat{x})$ , la convergence ayant lieu cette fois dans  $L^2(\hat{G})$ . Ce résultat se précise encore en disant que  $G$  est une base orthonormale de  $L^2(G)$  et que le développement de  $f \in L^2(G)$  suivant cette base est donné par (8).

Signalons pour terminer que l'application des résultats qu'on vient d'indiquer à des groupes moins usuels que  $\mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{T}^n$  ou  $\mathbf{Z}^n$  conduit à d'intéressants résultats dont on ne connaît malheureusement pas d'exposé systématique.

## § 5. La théorie de la dualité.

1. On a vu que le dual de  $\hat{G}$  était canoniquement isomorphe à  $G$ ; on peut alors développer une théorie de la dualité dans les groupes abéliens localement compacts, au moyen de la forme bilinéaire  $\langle x, \hat{x} \rangle$  définie dans  $G \times \hat{G}$ .

Si  $A$  est une partie de  $G$ , le sous-groupe fermé  $A^\perp$  de  $\hat{G}$  formé des caractères  $\hat{x} \in \hat{G}$  tels que  $\langle x, \hat{x} \rangle = 1$  si  $x \in A$  est dit *orthogonal* à  $A$ ; on définit de la même manière le sous-groupe fermé  $A'^\perp$  de  $G$  orthogonal à une partie  $A'$  de  $\hat{G}$ . Si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , on a  $(H^\perp)^\perp = \overline{H}$ .

- a) Ainsi  $H \rightarrow H^\perp$  est une application biunivoque, involutive et décroissante de l'ensemble des sous-groupes fermés de  $G$  (ordonné par inclusion) sur l'ensemble des sous-groupes fermés de  $\hat{G}$ , dont la correspondance réciproque est  $H' \rightarrow H'^\perp$ ; de plus le sous-groupe orthogonal à l'intersection d'une famille  $\mathfrak{F}$  de sous-groupes fermés de  $G$  est le sous-groupe de  $\hat{G}$  engendré par les orthogonaux des sous-groupes de  $\mathfrak{F}$ .
- b) Si  $H$  est un sous-groupe fermé de  $G$ , tout caractère  $\hat{x} \in H^\perp$  définit par passage au quotient modulo  $H$  un caractère  $\hat{x}$  de  $G/H$  et  $x \rightarrow \hat{x}$  est un isomorphisme de  $H^\perp$  sur le dual de

$G/H$ , que l'on identifie alors à  $H^\perp$ ; de même on peut identifier canoniquement le dual de  $H$  au groupe quotient  $\hat{G}/H^\perp$ . Pour que  $H$  soit ouvert, il faut et il suffit que  $H^\perp$  soit compact; il en résulte que le sous-groupe de  $\hat{G}$  orthogonal à la composante connexe de  $e$  dans  $G$  est la réunion des sous-groupes compacts de  $\hat{G}$ , la *torsion* de  $\hat{G}$ .

- c) Soient  $G$  et  $G_1$  deux groupes abéliens localement compacts et  $u$  une représentation continue de  $G$  dans  $G_1$ ; pour tout caractère  $\hat{x}_1$  de  $G_1$ ,  $x \rightarrow \langle u(x), \hat{x}_1 \rangle$  est un caractère  ${}^t u(\hat{x}_1)$  de  $G$  et  $\hat{x}_1 \rightarrow {}^t u(\hat{x}_1)$  est une représentation continue de  $\hat{G}_1$  dans  $\hat{G}$ , dite *transposée* de  $u$ ; le sous-groupe orthogonal au noyau de  $u$  est l'adhérence de  ${}^t u(\hat{G}_1)$ ; on a  ${}^t(\nu \circ u) = {}^t u \circ {}^t \nu$  si  $\nu$  est une représentation continue de  $G_1$  dans un groupe abélien localement compact  $G_2$ . Pour que  ${}^t u$  soit un homomorphisme, il faut et il suffit que  $u$  soit un homomorphisme; en particulier, si  $u$  est un isomorphisme de  $G$  sur  $G_1$ ,  ${}^t u$  est un isomorphisme de  $\hat{G}_1$  sur  $\hat{G}$ .

Pour tous ces résultats, on pourra consulter [16] ou [33].

2. Soit  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$ . Si  $f \in L^1(G)$ , on a vu au paragraphe 2, n° 1, que la fonction  $\dot{f}$  qui à la classe  $\dot{x}$  de  $x$  modulo  $H$  associe  $\dot{f}(\dot{x}) = \int_H f(xy) dy$  appartient à  $L^1(G/H)$  et que  $f \rightarrow \dot{f}$  est une représentation de l'algèbre involutive normée  $L^1(G)$  sur  $L^1(G/H)$ . On voit alors facilement que la transformée de FOURIER  $\hat{y} \rightarrow \int_{G/H} \langle \dot{x}, \hat{y} \rangle \dot{f}(\dot{x}) d\dot{x}$  de  $\dot{f}$  ( $\hat{y} \in H^\perp$ ) est la restriction à  $H^\perp$  de la transformée de FOURIER  $\hat{f}$  de  $f$ ; en particulier l'idéal fermé de  $L^1(G)$ , noyau de  $f \rightarrow \dot{f}$  est formé des  $f \in L^1(G)$  telles que  $\hat{f}(\hat{y}) = 0$  si  $\hat{y} \in H^\perp$  [27]. Ce résultat se précise ainsi:  $f \rightarrow \dot{f}$  applique  $\mathcal{Q}^1(G)$  dans  $\mathcal{Q}^1(G/H)$  et la formule d'inversion de FOURIER appliquée à  $\dot{f}$  montre alors que l'on a  $\int_H f(y) dy = \int_{H^\perp} \hat{f}(\hat{y}) d\hat{y}$  (formule sommatoire de POISSON).

3. On peut déduire de la théorie de la dualité des précisions sur la structure de  $G$ . Signalons les deux résultats suivants (qui sont d'ailleurs équivalents) [24, 16, 33]:

- a) Il existe dans  $G$  un sous-groupe fermé  $G_0$  ayant un supplémentaire isomorphe à  $\mathbf{R}^n$  et  $G_0$  a un sous-groupe ouvert et compact;

b) On dit qu'un groupe localement compact est *élémentaire* s'il est isomorphe à un groupe de la forme  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^p \times \mathbf{Z}^q \times F$  où  $F$  est un groupe abélien fini; alors  $G$  contient un sous-groupe ouvert  $H$ , *limite projective* de groupes élémentaires; autrement dit, il existe dans  $H$  une base de filtre  $\mathfrak{B}$  qui converge vers  $e$ , qui est formée de sous-groupes compacts et telle que  $H/N$  soit un groupe élémentaire pour tout  $N \in \mathfrak{B}^1$ .

### § 6. Idéaux dans les algèbres de groupes et théorie spectrale.

1. La théorie des idéaux de l'algèbre  $L^1(G)$  présente de grandes difficultés et elle est encore assez peu avancée (même pour  $G = \mathbf{R}$ ) sauf dans le cas des groupes *compacts*. Elle se fait essentiellement au moyen de la représentation de  $L^1(G)$ , au moyen de la transformation de FOURIER, sur la sous-algèbre  $\mathcal{A}(\hat{G})$  de  $\overline{\mathcal{K}(\hat{G})}$ .

Soit  $H$  une partie de  $L^1(G)$ ; on appelle *cospectre* de  $H$  et on désigne par  $\text{Cosp}(H)$  l'ensemble des caractères  $\hat{x} \in \hat{G}$  tels que  $\hat{f}(\hat{x}) = 0$  pour toute  $f \in H$ .  $\text{Cosp}(H)$  est un ensemble fermé de  $\hat{G}$ , égal au cospectre de l'idéal fermé de  $L^1(G)$  engendré par  $H$ . On remarquera que l'intérieur du cospectre de  $f \in L^1(G)$  est simplement le complémentaire du support de  $\hat{f}$ .

Soit maintenant  $A'$  une partie de  $\hat{G}$  et  $Z(A')$  l'ensemble des fonctions de  $L^1(G)$  dont les transformées de FOURIER s'annulent dans  $A'$ , c'est-à-dire dont le cospectre contient  $A'$ .  $Z(A')$  est un idéal fermé de  $L^1(G)$  et on a  $Z(A') = Z(\overline{A'})$ ,  $\overline{A'}$  étant l'adhérence de  $A'$ . De plus, pour tout ensemble *fermé*  $A'$  de  $\hat{G}$ , on a  $\text{Cosp}(Z(A')) = A'$ ; cela tient essentiellement au fait que, pour tout compact  $K'$  de  $\hat{G}$  et tout voisinage  $U'$  de  $K'$  dans  $\hat{G}$ , on peut trouver une fonction  $f \in L^1(G)$  telle que  $\hat{f}$  égale 1 dans

<sup>1</sup> Pour de plus amples détails sur la théorie de la dualité et la structure des groupes abéliens, cf. J. BRACONNIER, Sur les groupes topologiques localement compacts. *Journal Math. pures et appl.*, 27, 1-85 (1948).