Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1956)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ALGÈBRE DES POLYNOMES
Kapitel: Base de l'espace vectoriel des polynomes
Autor: Zamansky, Marc
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32901

Base de l'espace vectoriel des polynomes

Les propriétés de l'espace vectoriel des polynômes permettent d'écrire tout polynôme A sous la forme:

$$A = a_0 (1, 0, 0, ...) + a_1 (0, 1, 0, ...) + ... + a_n (0, 0, ..., 1, 0, ...)$$

c'est-à-dire, en désignant par e_k le polynôme dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de rang $k + 1$ qui vaut 1,

$$A = a_0 e_0 + a_1 e_1 + ... + a_n e_n .$$

L'ensemble des polynômes e_k *s'appelle base* et l'écriture précédente réalise ce qu'on appelle la *décomposition de A sur la base.* $a_p e_p$ s'appelle terme de degré p.

La définition de l'égalité de deux polynômes entraîne que cette décomposition est *unique.*

Appliquons la définition du produit de deux polynômes à deux polynômes e_p, e_q. On a $e_p = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_p, \alpha_{p+1}, ...)$ où $\alpha_k = 0$ si $k \neq p$ et $\alpha_p = 1$; $e_q = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_q, \beta_{q+1}, ...)$ où $\beta_k = 0$ si $k \neq q$ et $\beta_q = 1$.

Le $(k + 1)^{\underline{e}}$ coefficient de $e_p e_q$ est $\alpha_k \beta_0 + \alpha_{k-1} \beta_1 + ... + \alpha_0 \beta_k$. Ce coefficient ne peut être différent de zéro que s'il contient $\alpha_p \beta_p$. Or le $(k + 1)^{\underline{e}}$ coefficient de $e_p e_q$ est une somme de termes tels que la somme des indices de chaque terme $\alpha_{k-m} \beta_m$ est k; on ne trouvera donc $\alpha_p \beta_p$ que dans le $(p + q + 1)^{\underline{e}}$ coefficient ce qui entraîne que seul le $(p + q + 1)^{\underline{e}}$ coefficient de $e_p e_q$ n'est pas nul. Ce dernier coefficient est par définition:

$$\alpha_{p+q} \beta_0 + \alpha_{p+q-1} \beta_1 + ... + \alpha_p \beta_q + ... + \alpha_0 \beta_{p+q} = \alpha_p \beta_q = 1 .$$

Donc:

$$e_p e_q = e_q e_p = e_{p+q} .$$

Les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned}
&\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B \\
&(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A \\
&\alpha (\beta A) = \alpha\beta A \\
&A (B + C) = AB + AC \\
&e_p e_q = e_{p+q} .
\end{aligned}$$

permettent alors de calculer plus aisément que ne l'indiquaient les définitions, la somme et le produit de polynômes.

Ainsi:

$$= a_0 b_0 e_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) e_1 + (a_1 b_1 + a_2 b_0) e_2 \,.$$
$$AB = (a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2)(b_0 e_0 + b_1 e_1)$$

On retrouve les règles de calcul élémentaires.

Enfin la règle de calcul $e_p e_q = e_{p+q}$ pour le produit de deux polynômes de la base permet de montrer facilement que si A et B sont deux polynômes tels que $AB = 0$, l'un au moins des polynômes est nul. Supposons en effet que ni A, ni B ne sont nuls; alors soit parmi les termes $a_k e_k$ de A celui d'indice le plus élevé $a_p e_p$ tel que $a_p \neq 0$ et de même $b_q e_q$ dans B. Dans AB figure $a_p b_q e_{p+q}$ et comme $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$, $AB \neq 0$.

Ainsi $AB = 0$ entraîne $A = 0$ ou $B = 0$. Il en résulte que si $A \neq 0$ et si $AB = 0$, alors $B = 0$. Il en résulte encore que si $A \neq 0$ et si $AB = AC$, on a $A(B - C) = 0$, donc $B - C = 0$, donc $B = C$. En d'autres termes cela signifie que *tout polynôme différent de* 0 *est régulier pour la multiplication.*

Degré, valuation d'un polynome

Définition. — Soit $A = (a_0, a_1, ..., a_n, 0, ...)$ un polynôme. Nous appellerons *degré de A* et nous le désignerons par *degA*, le plus grand entier $n \geqslant 0$ tel que $a_n \neq 0$:

$$n = \deg A$$

Cela signifie que si $k \leqslant n$, il y a au moins un $a_k \neq 0$ et que $a_k = 0$ quel que soit $k > n$.

$\deg A = 0$ signifie que A est une constante, mais ne signifie pas nécessairement que $A = 0$.

Le degré de 0 n'est pas défini.

Le degré et les deux lois algébriques.

D'après la définition du degré, on a les propriétés suivantes:

1° Si $\deg A > \deg B$, alors $\deg(A + B) = \deg A$
Si $\deg A = \deg B = n$ et si $a_n + b_n \neq 0$, alors $\deg(A + B) = \deg A = \deg B$.