

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 2 (1956)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** ALGÈBRE DES POLYNOMES  
**Kapitel:** Base de l'espace vectoriel des polynomes  
**Autor:** Zamansky, Marc  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32901>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 08.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## BASE DE L'ESPACE VECTORIEL DES POLYNÔMES

Les propriétés de l'espace vectoriel des polynômes permettent d'écrire tout polynôme  $A$  sous la forme :

$$A = a_0 (1, 0, 0, \dots) + a_1 (0, 1, 0, \dots) + \dots + a_n (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$$

c'est-à-dire, en désignant par  $e_k$  le polynôme dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de rang  $k + 1$  qui vaut 1,

$$A = a_0 e_0 + a_1 e_1 + \dots + a_n e_n .$$

L'ensemble des polynômes  $e_k$  s'appelle base et l'écriture précédente réalise ce qu'on appelle la *décomposition de  $A$  sur la base*.  $a_p e_p$  s'appelle terme de degré  $p$ .

La définition de l'égalité de deux polynômes entraîne que cette décomposition est *unique*.

Appliquons la définition du produit de deux polynômes à deux polynômes  $e_p, e_q$ . On a  $e_p = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots)$  où  $\alpha_k = 0$  si  $k \neq p$  et  $\alpha_p = 1$ ;  $e_q = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q, \beta_{q+1}, \dots)$  où  $\beta_k = 0$  si  $k \neq q$  et  $\beta_q = 1$ .

Le  $(k + 1)^{\text{e}}$  coefficient de  $e_p e_q$  est  $\alpha_k \beta_0 + \alpha_{k-1} \beta_1 + \dots + \alpha_0 \beta_k$ . Ce coefficient ne peut être différent de zéro que s'il contient  $\alpha_p \beta_p$ . Or le  $(k + 1)^{\text{e}}$  coefficient de  $e_p e_q$  est une somme de termes tels que la somme des indices de chaque terme  $\alpha_{k-m} \beta_m$  est  $k$ ; on ne trouvera donc  $\alpha_p \beta_p$  que dans le  $(p + q + 1)^{\text{e}}$  coefficient ce qui entraîne que seul le  $(p + q + 1)^{\text{e}}$  coefficient de  $e_p e_q$  n'est pas nul. Ce dernier coefficient est par définition :

$$\alpha_{p+q} \beta_0 + \alpha_{p+q-1} \beta_1 + \dots + \alpha_p \beta_q + \dots + \alpha_0 \beta_{p+q} = \alpha_p \beta_q = 1 .$$

Donc :

$$e_p e_q = e_q e_p = e_{p+q} .$$

Les propriétés suivantes :

$$\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$$

$$\alpha (\beta A) = \alpha \beta A$$

$$A (B + C) = AB + AC$$

$$e_p e_q = e_{p+q} .$$

permettent alors de calculer plus aisément que ne l'indiquaient les définitions, la somme et le produit de polynômes.

Ainsi :

$$= a_0 b_0 e_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) e_1 + (a_1 b_1 + a_2 b_0) e_2 .$$

$$AB = (a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2) (b_0 e_0 + b_1 e_1)$$

On retrouve les règles de calcul élémentaires.

Enfin la règle de calcul  $e_p e_q = e_{p+q}$  pour le produit de deux polynômes de la base permet de montrer facilement que si A et B sont deux polynômes tels que  $AB = 0$ , l'un au moins des polynômes est nul. Supposons en effet que ni A, ni B ne sont nuls; alors soit parmi les termes  $a_k e_k$  de A celui d'indice le plus élevé  $a_p e_p$  tel que  $a_p \neq 0$  et de même  $b_q e_q$  dans B. Dans AB figure  $a_p b_q e_{p+q}$  et comme  $a_p \neq 0$ ,  $b_q \neq 0$ ,  $AB \neq 0$ .

Ainsi  $AB = 0$  entraîne  $A = 0$  ou  $B = 0$ . Il en résulte que si  $A \neq 0$  et si  $AB = 0$ , alors  $B = 0$ . Il en résulte encore que si  $A \neq 0$  et si  $AB = AC$ , on a  $A(B - C) = 0$ , donc  $B - C = 0$ , donc  $B = C$ . En d'autres termes cela signifie que *tout polynôme différent de 0 est régulier pour la multiplication.*

#### DEGRÉ, VALUATION D'UN POLYNÔME

*Définition.* — Soit  $A = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots)$  un polynôme. Nous appellerons *degré de A* et nous le désignerons par  $\text{deg} A$ , le plus grand entier  $n \geq 0$  tel que  $a_n \neq 0$ :

$$n = \text{deg} A$$

Cela signifie que si  $k \leq n$ , il y a au moins un  $a_k \neq 0$  et que  $a_k = 0$  quel que soit  $k > n$ .

$\text{deg} A = 0$  signifie que A est une constante, mais ne signifie pas nécessairement que  $A = 0$ .

Le degré de 0 n'est pas défini.

*Le degré et les deux lois algébriques.*

D'après la définition du degré, on a les propriétés suivantes:

1° Si  $\text{deg} A > \text{deg} B$ , alors  $\text{deg} (A + B) = \text{deg} A$

Si  $\text{deg} A = \text{deg} B = n$  et si  $a_n + b_n \neq 0$ , alors  $\text{deg} (A + B) = \text{deg} A = \text{deg} B$ .