Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 2 (1956)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ALGÈBRE DES POLYNOMES

Kapitel: problème de la division des polynomes

Autor: Zamansky, Marc

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32901

Dans le cas général:

$\deg(A + B) \leqslant \max(\deg A, \deg B)$, c'est-à-dire est inférieur ou égal au plus grand des entiers $\deg A$, $\deg B$.

2° Si $AB \neq 0$, $\deg AB = \deg A + \deg B$.

Définition. — Soit $A = (a_0, \ldots, a_n, 0, \ldots)$ un polynôme. Nous appellerons *valuation de A* et nous la désignerons par $v(A)$, le plus petit entier $m \geqslant 0$ tel que $a_m \neq 0$.

Cela entraîne que si $m \geqslant 1$ on a $a_k = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant m-1$. La valuation de 0 n'est pas définie.

On remarquera que quel que soit A: $v(A) \leqslant \deg A$.

La valuation et les deux lois algébriques.

D'après la définition, on a les propriétés suivantes:

1° Si $v(A) > v(B)$, alors $v(A + B) = v(B)$.
Si $v(A) = v(B) = m$ *et* si $a_m + b_m \neq 0$,
alors $v(A + B) = v(A) = v(B)$.

Dans le cas général: $v(A + B) \geqslant \min(v(A), v(B))$, c'est-à-dire supérieure ou égale au plus petit des entiers $v(A)$, $v(B)$.

2° Si $AB \neq 0$, alors $v(AB) = v(A) + v(B)$.

Remarque. — Une condition *nécessaire* (seulement) pour que $A = B$ est que $\deg A = \deg B$ *et* $v(A) = v(B)$. La négation de cette proposition signifie que si l'une des conditions $\deg A = \deg B$ ou $v(A) = v(B)$ n'est pas réalisée, alors $A \neq B$.

Le problème de la division des polynomes

L'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes est un anneau commutatif unitaire, mais n'est pas un corps, c'est-à-dire que la division n'est pas en général possible, c'est-à-dire encore, que deux polynômes A et B étant donnés il n'existe pas en général de polynômes X tel que $A = BX$.

Définition. — On dit que A est divisible par $B \neq 0$, s'il existe Q tel que $A = BQ$. On dit aussi que A est multiple de B ou que B divise A ou est diviseur de A. Alors A est aussi multiple de Q.

Si Q existe, il est unique car s'il existait encore Q' tel que $A = BQ'$ on aurait $BQ = BQ'$ et comme $B \neq 0$, $Q = Q'$.

On peut alors présenter cette définition de la façon suivante:

Soit A et B $\neq 0$ deux polynômes; considérons tous les polynômes $A - BX$ où X parcourt $\mathfrak{P}$ (c'est-à-dire où X est un polynôme quelconque); dire que A est divisible par B c'est dire qu'il existe $Q \in \mathfrak{P}$ tel que $A - BQ = 0$; Q est alors unique.

Lorsque A n'est pas divisible par B, il est alors naturel d'étudier les polynômes $A - BX$ où X parcourt $\mathfrak{P}$ et de tenter de trouver X de façon que $A - BX$ possède quelque propriété vraie lorsque $A = BQ$. Or si $A = BQ$, *nécessairement* $\deg A = \deg BQ$ et $v(A) = v(BQ)$; si $A \neq 0$ ($A = 0$ n'offre pas d'intérêt) on *doit* avoir $\deg A = \deg B + \deg Q$ et $v(A) = v(B) + v(Q)$.

On peut être tenté de chercher pour deux polynômes A et B, un polynôme X tel que simultanément $\deg A = \deg B + \deg X$ *et* $v(A) = v(B) + v(X)$. Il est facile de voir par un exemple que c'est en général impossible.

On peut alors chercher à sauvegarder l'une des deux propriétés précédentes pour *tout* couple A, B; en d'autres termes la propriété cherchée doit être vraie *quels que soient* les polynômes A et B. Mais si alors on cherche X en lui imposant la seule condition $\deg A = \deg B + \deg X$, on peut satisfaire à cette condition d'une infinité de manières; nous sommes donc amenés à chercher parmi tous les X possibles, ceux qui possèdent une autre propriété. Cette discussion motive le point de vue qui suit.

Considérons une famille quelconque de polynômes non nuls. Comme les degrés sont des entiers $\geqslant 0$, il existe dans cette famille, au moins un polynôme dont le degré est inférieur ou égal à tous les degrés des polynômes de cette famille. Considérons alors la famille de tous les polynômes $A - BX$ où $X \in \mathfrak{P}$. Si à cette famille on applique la remarque qui vient d'être faite on en conclut qu'il existe au moins un polynôme Q tel que $\deg (A - BQ) \leqslant \deg (A - BX)$ quel que soit $X \in \mathfrak{P}$. Nous verrons alors que nécessairement $\deg (A - BQ) < \deg B$ et que pour tout couple A, B, le polynôme Q tel que $\deg (A - BQ) < \deg B$ est unique. Ce sera *la division euclidienne de* A *par* B *ou division suivant les puissances décroissantes*.

L'idée de la division suivant les puissances croissantes sera déduite de la précédente division, puis nous montrerons que les deux divisions peuvent être ramenées l'une à l'autre.

La division euclidienne

Soit A et B deux polynômes. Soit $B \neq 0$. Si $A = 0$, on a $A = BO$ donc A est divisible par B. Supposons $A \neq 0$ et parmi tous les polynômes $A - BX$ soit $A - BQ$ tel que $\deg (A - BQ) \leqslant \deg (A - BX)$ quel que soit X, lorsque A n'est pas divisible par B.

Montrons que 1°: $\deg (A - BQ) < \deg B$; 2° Q est unique.

1° Soit en effet:

$$B = b_0 e_0 + \dots + b_p e_p \; (b_p \neq 0)$$
$$A - BQ = c_0 e_0 + \dots + c_p e_p + \dots + c_m e_m$$

et supposons $m > p$ et $c_m \neq 0$, m étant le plus petit degré possible de tous les polynômes $A - BX$.

On a alors:

$$e_{m-p} B = b_0 e_{m-p} + \dots + b_p e_m$$
$$\frac{c_m}{b_p} e_{m-p} B = \frac{b_0 c_m}{b_p} e_{m-p} + \dots + \frac{c_m}{b_p} b_{p-1} e_{m-1} + c_m e_m \, .$$

D'où

$$A - BQ - \frac{c_m}{b_p} e_{m-p} B = A - B \left(Q + \frac{c_m}{b_p} e_{m-p} \right) =$$
$$= c_0 e_0 + \dots + \left(c_{m-1} - \frac{c_m}{b_p} b_{p-1} \right) e_{m-1} \, .$$

Q' désignant le polynôme $Q + \frac{c_m}{b_p} e_{m-p}$, $A - BQ'$ serait de degré $< m$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite sur m. L'hypothèse $m \geqslant p$ est donc incompatible avec "m est le plus petit degré possible de tous les $A - BX$". On a donc $m < p$, c'est-à-dire $\deg (A - BQ) < \deg B$.

2° Si existait $Q' \neq Q$ tel que $\deg (A - BQ') \leqslant \deg (A - BX)$ quel que soit X, on aurait $\deg (A - BQ') < \deg B$ d'après ce qui précède. Donc

$$\deg (A - BQ - (A - BQ')) = \deg B (Q' - Q) < \deg B \, .$$