

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1956)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ALGÈBRE DES POLYNOMES
Kapitel: division suivant les puissances croissantes
Autor: Zamansky, Marc
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-32901>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Or si on suppose $Q' \neq Q$, on a $\deg(Q' - Q) \geq 0$, donc $\deg B(Q' - Q) \geq \deg B$ ce qui contredit $\deg B(Q' - Q) < \deg B$. Nécessairement $Q' = Q$.

D'où :

THÉORÈME. — *Etant donnés deux polynômes A et B, B \neq 0 il existe un polynôme Q et un seul tel que $A - BQ = 0$ ou bien tel que $\deg(A - BQ) \leq \deg(A - BX)$ quel que soit le polynôme X ; de plus dans le second cas $\deg(A - BQ) < \deg B$.*

Ce résultat peut alors être écrit :

$$A = BQ + R, \quad \deg R < \deg B$$

où le couple Q, R est unique. Q est le *quotient*, R le *reste*.

On notera que la première partie de la démonstration fournit la méthode pratique bien connue.

LA DIVISION SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES

Soit $A = a_0 e_0 + \dots + a_n e_n$ un polynôme non nul, de degré n ($a_n \neq 0$). Appelons polynôme *transposé* de A le polynôme $\bar{A} = a_n e_0 + a_{n-1} e_1 + \dots + a_0 e_n$. Quel que soit $A \neq 0$, $\nu(\bar{A}) = 0$ et $\deg \bar{A} = \deg A - \nu(A)$; on a donc $\deg \bar{A} \leq \deg A$.

Cherchons les propriétés de l'opération qui à A associe \bar{A} relativement au produit de A par une croissante α , à la somme $A + B$, au produit AB.

1° Si $\alpha \neq 0$, on a $\overline{(\alpha A)} = \alpha \bar{A}$.

2° Soit $A = a_0 e_0 + \dots + a_n e_n$ ($a_n \neq 0$) et $B = b_0 e_0 + \dots + b_p e_p$ ($b_p \neq 0$) et supposons par exemple $\deg A = n \geq \deg B = p$.

Remarquons que quel que soit h , $\overline{(e_h A)} = \bar{A} e_0$

a) Si $\deg A = n > p = \deg B$, on a :

$$\overline{(A + B)} = \bar{A} + e_{n-p} \bar{B}$$

b) Si $\deg A = n = p = \deg B$ et si $\deg(A + B) = \deg A$ (c'est-à-dire si $a_n + b_n \neq 0$), on a :

$$\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$$

c) Si $\deg A = \deg B$ et si $\deg(A + B) < \deg A$ (c'est-à-dire si $a_n + b_n = 0$), soit alors $m = \deg(A + B) < n$.

On a :

$$\overline{A + B} = (a_m + b_m) e_0 + \dots + (a_0 + b_0) e_m$$

$$\overline{A} + \overline{B} = (a_m + b_m) e_{n-m} + \dots + (a_0 + b_0) e_n = e_{n-m} \overline{(A + B)} .$$

Donc $\overline{A} + \overline{B} = e_{n-m} \overline{(A + B)}$.

3° Soit $a_n \neq 0, b_p \neq 0$.

$$AB = A b_p e_p + A b_{p-1} e_{p-1} + \dots + A b_0 e_0 .$$

En appliquant le résultat du 2° a) précédent on a :

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{A} b_0 e_0 + e_{n+p-(n+p-1)} \overline{(A b_{p-1} e_{p-1} + \dots)} = \\ &= \overline{A} b_p e_0 + e_1 \overline{A} b_{p-1} + \dots . \end{aligned}$$

D'où $\overline{AB} = \overline{A} \overline{B}$.

Ces règles étant établies, soient A et B non nuls et supposons $\text{deg } A \geq \text{deg } B$. Soient Q et R les quotient et reste de la division euclidienne de A par B :

$$A = BQ + R , \quad \text{deg } R < \text{deg } B .$$

Soit $n = \text{deg } A, p = \text{deg } B, r = \text{deg } R < p$

On a alors :

$$\overline{A} = \overline{B} \overline{Q} + e_{n-r} \overline{R} = \overline{B} \overline{Q} + e_{\text{deg } A - \text{deg } (A - BQ)} \overline{R} .$$

Comme $\text{deg } Q = n - p, \text{deg } \overline{Q} < n - p$ et comme $r < p, n - p < \nu(e_{n-r} \overline{R}) = \nu(\overline{A} - \overline{B} \overline{Q})$.

Ainsi aux polynômes $\overline{A}, \overline{B}$, transposés de A et B est associé un polynôme \overline{Q} tel que $\text{deg } \overline{Q} < \nu(\overline{A} - \overline{B} \overline{Q})$. [On notera que $\nu(\overline{A}) = \nu(\overline{B}) = 0$].

Donc dans certains cas (jusqu'à présent), à deux polynômes A, B on peut associer un polynôme Q tel que $\text{deg } Q < \nu(A - BQ)$.

C'est l'origine du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Etant donnés deux polynômes A, B tels que $\nu(B) = 0$ et un entier $k \geq 0$, il existe un polynôme Q et un seul tel que*

$$\text{deg } Q \leq k < \nu(A - BQ)$$

à moins que $A - BQ = 0$.

Existence. — Considérons tous les polynômes X tels que $\deg X \leq k$. Tous les polynômes $A - BX$ ont une valuation bornée car

$$\nu(A - BX) \leq \deg(A - BX) < \max(\deg A, k + \deg B).$$

Il existe donc au moins un polynôme Q ($\deg Q \leq k$) pour lequel $\nu(A - BX) \leq \nu(A - BQ)$ quel que soit X . Je dis que pour ce polynôme Q , on a $\nu(A - BQ) > k$. En effet supposons que Q donne à $A - BQ$ la plus grande valuation possible et que cette valuation soit $m \leq k$.

On aurait alors

$$A - BQ = c_m e_m + \dots + c_k e_k + \dots + c_N e_N$$

$$B = b_0 e_0 + \dots + b_p e_p$$

$$A - BQ - \frac{c_m}{b_0} e_m B = \lambda e_{m+1} + \dots$$

Donc $A - B \left(Q + \frac{c_m}{b_0} e_m \right)$ aurait une valuation $> m$ et $Q + \frac{c_m}{b_0} e_m$ serait de degré $\leq k$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur Q .

Unicité. — Si existait $Q' \neq Q$ tel que $\deg Q' \leq k$ et $k < \nu(A - BQ')$ on aurait:

$$k < \nu(A - BQ - A + BQ') = \nu(B(Q' - Q)) = \nu(B) + \nu(Q' - Q) = \nu(Q' - Q) \leq \deg(Q' - Q) \leq k$$

ce qui est impossible.

Ainsi à tout couple de polynôme A, B ($\nu(B) = 0$) et un entier $k \geq 0$ correspond un couple unique de polynômes Q, R tels que

$$A = BQ + e_{k+1} R \quad \text{et} \quad \deg Q \leq k.$$

Cette opération s'appelle division suivant les *puissances croissantes à l'ordre* k .