# SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

## Conférences et communications

---

*Séance de printemps, Berne, 10 juin 1956.*

Conférence de M. le professeur A. WEINSTEIN (University of Maryland): Singuläre Partielle Differentialgleichungen.

*Réunion de Bâle, 23 septembre 1956.*

La Société mathématique suisse a tenu sa 45^e^ assemblée annuelle à Bâle, le 23 septembre 1956, en même temps que la 136^e^ session de la Société helvétique des Sciences naturelles. Les communications scientifiques, au nombre de neuf, et la conférence principale de M. le professeur Hadwiger ont fait l'objet de deux séances présidées par M. le professeur VINCENT, vice-président, en remplacement de M. le professeur STIEFEL, empêché par un voyage à l'étranger.

*Conférence Générale:*

H. HADWIGER (Bern): *Ausgewählte Probleme der kombinatorischen Geometrie des euklidischen und sphärischen Raumes.*

(Eine zusammenfassende, gekürzte Darstellung wird in « L'Enseignement Mathématiqne » tome **3**, fasc. 1, 1957, publiziert werden.)

*Résumé des communications:*

1. H. R. SCHWARZ (Zürich): *Zur Stabilität von Matrizen.*
(Erscheint in erweiterter Fassung in *ZaMP*, 1956, Heft 6.)

2. J. FLECKENSTEIN (Basel): *Bemerkungen zu einer Archimedeshandschrift « De Curvis Superficiebus » aus dem Basler Codex F II* 33.

Im Rahmen einer grossangelegten Untersuchung über « Archimedes im Mittelalter » hat Marshall Clagett (Wisconsin), 1954, den

Text « De curvis superficiebus Archimenidis » (*Osiris*, 11, pp. 295-364), einen Kommentar des apokryphen Johannes von Tinemue zu Archimedes « De sphaera et cylindro, Lib. I », ediert. Clagett zitiert 11 Handschriften (Neapel, Florenz, Paris, Basel, Wien, Dresden, Cambridge, 2 London, 2 Oxford), benutzt aber bei der Kollation nur 8. Den Dresdener Text hat er nicht zu Gesicht bekommen, den Basler Codex F II 33, fol. $151^r$—$153^v$ nur kurz angesehen, ohne ihn zu berücksichtigen, da er ihn mit den beiden Oxforder Handschriften der Bodleyan Library im wesentlichen übereinstimmend hält.

Wir können uns dieser Auffassung nicht anschliessen, denn die Zahl der Varianten der Basler Handschrift gegenüber Clagetts Kollation ist zu gross. Wir haben auf unserem Text von insgesamt 738 Zeilen fast 400, d.h. durchschnittlich 2 Varianten pro Zeile gezählt. Hierunter befinden sich etwa 60 wesentliche Varianten, wie Auslassungen, Umstellungen, Zusätze und Wortänderungen. Da Clagett die individuellen Varianten der 8 seiner Kollation zugrundeliegenden Handschriften angibt, können wir den Typus unseres Basler Manuskriptes feststellen, welches wir überdies noch mit dem Dresdener (Db 86) verglichen haben. Von letzterem, das nach paläographischen Kriterien dem XIII Saec. zuzuweisen ist, können wir freilich sagen, dass es mit der Oxforder übereinstimmt (XIII Saec.), Der Basler Codex stammt dagegen aus dem XIV Saec., wie sich mit einer Eintragung anno 1349 (fol. $196^v$) beweisen lässt. Die Handschrift trägt mit ihren häufigen Omissionen und Kontraktionen gegenüber Clagetts Kollation typischen Spätlingscharakter, ja man wäre nach dem stark gotisierten stenographischen Schriftbild fast geneigt, sie in den Anfang des XV. Saec. zu versetzen. Bemerkenswert ist, dass durchwegs schon arabische Ziffern verwendet werden, womit sie aus der Tradition der anderen herausfällt. Auch fehlt bei ihr der Name des bis jetzt nicht zu identifizierenden Autors; Clagett erwägt hierbei die Möglichkeit, dass Tinemue eine typische mediaevale Verballhornung von Tynmouth (Northumberland) sei.

Das Basler Manuskript zeigt freilich 4 für die Oxforder Texte typische Varianten. Häufiger sind aber die Varianten, welche nur für die Neapolitaner Handschrift charakteristisch sind, so die Vertauschung von 9 in 11 und 5 in 4 bei der Zitation der Propositionen und Verwendung von « invenire » statt « reperire ». Darüber hinaus hat der Basler Text als seine spezifische Varianten die Ersetzung von « quadratura » in « mensura circuli », von « columpna » in « conica » und von « elementa » in « elementa Euclidis ». Im Gegensatz zu Clagett halten wir dafür, dass die Basler Handschrift der Tradition des Naepolitaner Textes (Biblioteca Nazionale, MS VIII, C 22, $57^r$—$60^r$, 13 saec.) zugehört.

Der Autor der Schrift, Johannes de Tinemue, erweist sich als guter Kenner der Elemente des Euklid, der Kreismessung des Archimedes und dessen Werk über Kugel und Zylinder. Ausgehend vom Archimedischen Näherungswert für $\pi = 3\frac{1}{7}$ (oder Kreisfläche: Durchmesserquadrat $= \frac{\pi}{4} = 11:14$) leitet er in seinem Traktat den Satzher, dass sich das Kugelvolumen zum Durchmesserwürfel wie 11: 21 verhalte. Hierzu braucht er nur den berühmten Satz von Archimedes von Umzylinder: Kugel: Inkegel = 3: 2: 1, den er in der Prop. VIII des Traktats beweist. Denn da sich auch dieses Zylindervolumen zum Durchmesserwürfel wie 11: 14 verhält, verhält sich das gesuchte Kugelvolumen zu diesem wie $\frac{2}{3} \cdot \frac{11}{14} = 11:21$.

V.d. Waerden hat just diese Schrift des Archimedes über Kugel und Zylinder als Musterbeispiel für « Einfall und Überlegung in der Mathematik » (*Elemente der Mathematik*, Bd. IX, 1954) herangezogen. Hier ist nun interessant zu bemerken, wie beispielsweise der mittelalterliche Kommentator — obwohl er keinesfalls sklavisch dem Archimedes folgtgerade die entscheidende Zerlegung der Rotationsfiguren blind übernimmt, ohne zu bemerken, dass die Grundpolygone eine durch 4 teilbare Seitenzahl haben müssen, damit die von ihnen erzeugten Rotationskörper nur von Kegelflächen begrenzt werden. Der Exhaustionsbeweis bei Johannes ist zwar streng, aber schwerfällig. Auffällig ist das ständige Vermischen der Sätze des Traktats mit solchen aus der Kreismessung, um dann schliesslich als Hauptsatz die oben erwähnte Proposition X herzuleiten, die ja nur eine numerische Approximation darstellt. Weil der Traktat überhaupt das Niveau des Archimedes nicht ganz einhält, vermutet Clagett, dass er gar nicht auf Archimedes, sondern auf Heron zurückgeht, von dem die Araber ebenfalls Handschriften hatten. Ja man kann sogar annehmen, dass er aus einer direkten Herontradition stammt, während man im anderen Fall postulieren muss, dass die arabischen Übersetzungen als Zwischenmedium den ursprünglichen Archimedestext langsam korrumpiert haben.

3. J. Hersch (Zürich): *Une méthode aux différences définie par une relation de récurrence.*

1. Pour la résolution de problèmes aux limites ou aux valeurs propres, on peut essayer de construire des équations aux différences $L_h[u] = 0$ ($h$ est la maille) fournissant la solution exacte. Si le problème initial a été résolu, on peut en déduire *a posteriori* l'équation aux différences; mais le cas intéressant est celui où la solution exacte nous échappe. Le procédé esquissé ici consiste à construire des équations aux différences «cohérentes» $L_{h/2^r}[u] = 0$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, c'est-à-dire telles que $L_{h/2}[u] = 0$ entraîne $L_h[u] = 0$. Si cette *récurrence* $\frac{h}{2} \to h$ est exactement possible, et si, lors du *passage à la limite* $h \to 0$, $L_h[u] = 0$ devient équivalente à l'équation différentielle donnée,

alors nous aurons essentiellement résolu le problème initial dès que nous aurons résolu l'équation aux différences pour une maille fidie $h$.

*Exemple* trivial: corde vibrante. $\frac{d^2 \varphi}{d x^2} + \lambda\varphi = 0$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Nous voulons ignorer les solutions bien connues $\varphi_n = \sin(n\pi x)$, $\lambda_n = n^2 \pi^2$. Prenons $h = \frac{1}{m}$, $m$ entier; $u_i = \varphi\left(\frac{i}{m}\right)$; $L_h(u_i) \equiv u_{i-1} - A_h u_i + u_{i+1} = 0$; la récurrence $\frac{h}{2} \to h$ donne immédiatement $A_h = A_{h/2}^2 - 2$, ce qui permet de poser $A_h = 2\cos(kh)$; le passage à la limite $h \to 0$ donne $k = \sqrt{\lambda}$, soit

$$A_h = 2\cos(h\sqrt{\lambda}) ,$$

*au lieu de l'équation aux différences classique où* $A_h = 2 - \lambda h^2$.

Prenons par exemple $h = \frac{1}{4}$, nous obtenons l'équation caractéristique

$$0 = \begin{vmatrix} -A & 1 & 0 \\ 1 & -A & 1 \\ 0 & 1 & -A \end{vmatrix} = A(2 - A^2) ;$$

d'où $\lambda = n^2 \pi^2$ avec $n \neq 0 \bmod 4$; les solutions avec $n = 4N$ doivent évidemment manquer, du fait que les $\varphi_{4N}$ s'annulent en tous les « nœuds » $x = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$.

2. Cet exemple trivial peut servir de *modèle*, notamment pour l'étude des valeurs propres d'une *membrane* vibrante. La récurrence $L_{h/2} \to L_h$ n'est plus exacte; on peut choisir l'opérateur discret $L_h$ en sorte que l'écart (la quantité négligée) soit minimum, ou bien d'un signe déterminé. On obtient alors une méthode à convergence numérique rapide, ou bien une évaluation par défaut de la première valeur propre.

*Exemple numérique.* — Calcul approché de la fréquence fondamentale d'une membrane hexagonale régulière (côté 1) à bords fixes. (On sait par ailleurs que $7 < \lambda_1 < 7{,}17$.)

| | | *Méthode classique* | *Méthode récurrente* (exige le même travail) |
|---|---|---|---|
| $h = 1$: | 1 inconnue | $\lambda_1 \simeq 4$ | $\lambda_1 \simeq 5{,}85$ |
| $h = \frac{1}{2}$: | 2 inconnues | 6,28 (Collatz) | 7,01 |
| $h = \frac{1}{3}$: | 4 « | 6,77 (Collatz) | $7{,}1_{15}$ |
| $h = \frac{1}{4}$: | 6 « | 6,93 | $7{,}1_3$ |

4. A. Aeppli (Zürich): *Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten.*

1. *Einleitung.* — V, W sind komplex $n$-dimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten, $\varphi$: V → W ist eine komplex analytische Abbildung von V auf W vom Abbildungsgrad 1. Dann induziert $\varphi$ eine komplexe Modifikation $\Phi$ (mit Abbildung; alle hier betrachteten Modifikationen sind Modifikationen mit komplex analytischer Abbildung):

$$\Phi: \quad (\mathrm{V}, \mathrm{S}) \dashrightarrow (\mathrm{W}, \mathrm{A}) \,, \tag{1}$$

dh. wenn V — S die Menge der Punkte ist, in denen $\varphi$ lokal eineindeutig ist, induziert $\varphi$ den komplex analytischen Homöomorphismus $\varphi'$: V — S → W — A, und $\varphi$ bildet die Singularitätenmenge S auf die Ausnahmemenge A ab. Falls $\varphi$ ein komplexer Homöomorphismus ist, heisst $\Phi$ trivial. Ist $\Phi$ nicht trivial, so gilt für die komplexen Dimensionen von A und von S: dim A < dim S = $n$ — 1. Sind S und A komplexe Mannigfaltigkeiten, dh. ist S bzw. A regulär in V bzw. in W eingebettet, so heisst $\Phi$ regulär. Der Hopfsche $\sigma$-Prozess und der von Kreyszig eingeführte $\sigma^{n,q}$-Prozess liefern Beispiele komplexer Modifikationen. Es handelt sich um reguläre Modifikationen, bei denen ein Punkt $p$ bzw. eine komplex $q$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit $\mathrm{A}^{(q)}$ ersetzt wird durch den komplex projektiven Raum $\mathrm{P}^{(n-1)}$ bzw. durch eine komplexe Mannigfaltigkeit $\mathrm{S}^{(n-1)}$, die durch projektive Räume $\mathrm{P}^{(n-q-1)}$ komplex gefasert wird. Für A = $p$ heisst $\Phi$ lokal. Zwei Modifikationen $\Phi$: (V, S) → (W, A) und $\Phi'$: (V', S') → (W, A) mit den Abbildungen $\varphi$ und $\varphi'$ heissen äquivalent, wenn es einen komplexen Homöomorphismus $\theta$: V → V' mit $\varphi = \varphi' \, \theta$ gibt.

2. *Einzigkeitssatz über den $\sigma$-Prozess. — Jede nicht triviale reguläre Modifikation* $\Phi$: (V, S) → (W, p) *ist äquivalent dem $\sigma$-Prozess in* p, *ausgeführt innerhalb* W.

Somit muss bei einer nicht trivialen regulären lokalen Modifikation S = $\mathrm{P}^{(n-1)}$ sein. Für $n = 2$ ist der obige Satz bekannt (Zariski, Hopf), und es gilt weiter für $n = 2$: wird die Regularität der lokalen Modifikation nicht gefordert, so wird S ein Hopfscher « Sphärenbaum ». Der Einzigkeitssatz über den $\sigma$-Prozess wird zum Beweise des folgenden allgemeineren Satzes benutzt:

3. *Einzigkeitssatz über den $\sigma^{n,q}$-Prozess. — Jede nicht triviale reguläre Modifikation ist äquivalent zu einem $\sigma^{n,q}$-Prozess.*

In den beiden Sätzen 2. und 3. kann die Forderung der Regularität von $\Phi$ abgeschwächt werden. Es genügt vorauszusetzen, dass in (1) S und A in V bzw. in W singularitätenfrei eingelagerte Mannigfaltigkeiten sind.

4. *Anwendungen.* — Mit Hilfe von 3. werden die folgenden Sätze bewiesen:

*a)* Die Dilatation (oder die monoidale Transformation) der singularitätenfreien algebraischen Mannigfaltigkeit $W^{(n)}$ längs der regulär eingelagerten Teilmannigfaltigkeit $A^{(q)}$, $q \leqslant n - 2$, ist der $\sigma^{n,q}$-Prozess längs A in W;

*b)* Ist in der regulären Modifikation (1) W singularitätenfrei algebraisch, so ist es auch V. (Es gilt entsprechend: ist W Kählersch, so ist es auch V);

*c)* Für eine komplexe Mannigfaltigkeit M sei $H^{u,v}_{d''}(M)$ die $d''$-Cohomologiegruppe vom Typus $(u, v)$ (Dolbeaultsche Gruppe vom Typus $(u, v)$). Bei einer nicht trivialen regulären Modifikation (1) gelten die folgenden Isomorphismen:

$$H^{u,v}_{d''}(V) \cong H^{u,v}_{d''}(W) + H^{u,v}_{d''}(S) - H^{u,v}_{d''}(A) ,$$

$$H^{t,k}_{d''}\left(S^{(n-1)}\right) \cong \sum_{u,v} H^{u,v}_{d''}\left(A^{(q)}\right) \otimes H^{t-u,k-v}_{d''}\left(P^{(n-q-1)}\right) \cong H^{t,k}_{d''}\left(A^{(q)} \times P^{(n-q-1)}\right).$$

5. A. Calame (La Chaux-de-Fonds): *Les relations caractéristiques des bases du groupe symétrique.*

Soit G un groupe fini engendré par deux éléments S, T et soit (1) $F_i(S, T) = 1$ $(i = 1, 2, ..., m)$ un ensemble de $m$ relations liant les deux éléments générateurs S et T. Si toute relation $f(S, T) = 1$ est une conséquence des relations (1), les relations (1) forment un système de *relations caractéristiques* de G. Soit S′, T′ une autre base de G. On peut exprimer S′ et T′ en fonction de S et T:

$$S' = g(S, T) \qquad T' = h(S, T) \tag{2}$$

Inversement:

$$S = g'(S', T') \qquad T = h'(S', T') \tag{3}$$

Si le système (3) se déduit du système (2) sans l'aide d'aucune autre relation entre S et T, nous disons que les relations (3) sont *réversibles* et que les bases S, T et S′, T′ sont de la même *classe.* Deux bases semblables sont de la même classe. Connaissant les relations caractéristiques d'une base S, T, on déduit aisément les relations caractéristiques d'une base S′, T′ de la même classe, au moyen des relations (3). Pour obtenir un système de relations caractéristiques pour chaque base de G, il suffit de répartir les bases de G en classes et de déterminer les relations fondamentales d'une base de chaque classe.

Pour établir les relations caractéristiques d'une base S, T, nous reconstituons le groupe G à partir de S et T selon une méthode précise qui donne directement un ensemble de relations (4) $R(S, T) = 1$ entre S et T. On démontre que toute relation existant entre S et T est une conséquence des relations (4). On choisit alors comme système de relations caractéristiques de la base S, T celles des relations (4) dont découlent toutes les autres.

M[lle] S. Piccard a montré que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_6$ possède 114 480 bases d'ordre 2. On peut répartir ces bases en cinq classes au sens ci-dessus. Les automorphismes externes de $\mathfrak{S}_6$ permutent entre elles deux de ces classes, si bien qu'il suffit d'étudier les relations fondamentales de quatre bases de $\mathfrak{S}_6$ pour en déduire un système de relations caractéristiques de n'importe quelle base de ce groupe. Nous donnons ci-dessous quatre bases de $\mathfrak{S}_6$ et leurs relations caractéristiques:

$$
\begin{array}{llll}
S_1 = (12543) & T_1 = (123456) & S_1^5 = 1 & (5) \\
 & & T_1^6 = 1 & (6) \\
 & & (S_1 T_1)^4 = 1 & (7) \\
 & & (S_1^2 T_1^2)^2 = 1 & (8) \\
 & & (T_1^5 S_1)^2 (T_1^3 S_1^2)^2 = 1 & (9) \\
S_2 = (13425) & T_2 = (123456) & S_2^5 = 1 & (10) \\
 & & T_2^6 = 1 & (11) \\
 & & (S_2^2 T_2)^4 = 1 & (12) \\
 & & (S_2 T_2^4)^2 = 1 & (13) \\
 & & (T_2 S_2^3)^2 (T_2^3 S_2)^2 = 1 & (14) \\
S_3 = (123456) & T_3 = (13)(456) & S_3^6 = 1 & (15) \\
 & & T_3^6 = 1 & (16) \\
 & & (T_3 S_3)^4 = 1 & (17) \\
 & & T_3^3 S_3 T_3 S_3 T_3^4 S_3^3 T_3^5 S_3^4 = 1 & (18) \\
S_4 = (1234) & T_4 = (123456) & S_4^4 = 1 & (19) \\
 & & (S_4 T_4)^4 = 1 & (20) \\
 & & (S_4^3 T_4)^3 = 1 & (21) \\
 & & S_4^2 T_4^2 S_4^2 T_4^{-4} = 1 & (22)
\end{array}
$$

Transformons (18) au moyen de (17), (15) et (16):

$$T_3^2 (T_3 S_3 T_3 S_3 T_3) T_3^3 S_3^3 T_3^5 S_3^4 = T_3^2 S_3^5 T_3^5 S_3^5 T_3^3 S_3^3 T_3^5 S_3^4 = 1$$

Comparons l'inverse du second membre avec (18):

$$T_3^3 S_3 T_3 S_3 T_3^4 S_3^2 T_3 S_3^3 = T_3^3 S_3 T_3 S_3 T_3^4 S_3^3 T_3^5 S_3^4$$

d'où

$$T_3 = S_3 T_3^5 S_3$$

et d'après (16):

$$(S_3 T_3^5)^2 = 1 \; . \tag{23}$$

Les quatre relations (15), (16), (17), (18) suffisent pour caractériser $\mathfrak{S}_6$, puisqu'on peut en déduire le système (15), (16), (17), (18), (23) qui est un système de relations caractéristiques de ce groupe [1].

De même, de (22) on déduit:

$$S_4^2 T_4^2 S_4^2 = T_4^4 \tag{24}$$

$$S_4^2 T_4^2 S_4^2 \cdot S_4^2 T_4^2 S_4^2 = S_4^2 T_4^4 S_4^2 = T_4^8 \tag{25}$$

d'après (19). Dans le second membre de (25), remplaçons $T_4^4$ par le premier membre de (24):

$$S_4^2 (S_4^2 T_4^2 S_4^2) S_4^2 = T_4^8$$

et d'après (19):

$$T_4^2 = T_4^8 \quad \text{ou} \quad T_4^6 = 1 \; . \tag{26}$$

En tenant compte de (26), la relation (22) devient (27) $(S_4^2 T_4^2)^2 = 1$. Les quatre relations (19), (20), (21), (22) caractérisent $\mathfrak{S}_6$, puisqu'on en déduit le système (19), (20), (21), (26), (27) dont les relations sont caractéristiques de $\mathfrak{S}_6$ [1]. De plus, les quatre relations de la base $S_4, T_4$ sont indépendantes.

6. J. J. Burckhardt (Zürich): *Die astronomischen Tafeln von Al Khwārizmī.*

Auf die Frage nach der Abhängigkeit der astronomischen Tafeln des Al-Khwārizmī [1] von der indischen Astronomie ist bereits der Herausgeber der Tafeln, H. Suter, eingetreten (siehe [1], S. VII—VIII, S. 32—33), neuerdings wird sie in [2] und [3] besprochen. Wir wollen im folgenden das Problem in bezug auf die mittlere Bewegung von Sonne, Mond und Planeten beantworten.

1. *Länge des siderischen Jahres bei Al-Khwārizmī.*

In [1] finden wir in Tab. 115, S. 230, den Überschuss des siderischen über das ägyptische Jahr für 1, 2, ..., 10, 20, ..., 100 Jahre angegeben. Für ein Jahr beträgt er $6^h\ 12^m$, für 100 Jahre $25^d\ 20^h\ 15^m$. Hieraus ist ersichtlich, dass der genaue Wert für ein Jahr $6^h\ 12^m\ 9^s$ beträgt, was genau mit dem in Graden angegebenen Wert von

[1] *Les relations caractéristiques des bases du groupe symétrique.* Thèse. Neuchâtel, 1955.

93° 2′ 15″ übereinstimmt. Somit ist die siderische Jahreslänge $365^d\ 6^h\ 12^m\ 9^s = 365; 15, 30, 22, 30$. Denselben Wert gibt Brahmagupta im Brahmasphuta-siddhānta (628 AD), siehe [1], S. 65, 103, 235; [2] S. 151.

2. *Mittlere Bewegungen nach den Tab. 4-18.*

Diese Tabellen geben die mittlere Bewegung pro 2, 4, ..., 60 Minuten, pro 1, 2, ..., 24 Stunden, pro 1, 2, ..., 30 Tage, pro 1, 2, ..., 30 Jahre, pro 30, 60, ..., 570 Jahre. Es handelt sich dabei um arabische Mondjahre zu 354 Tage, eingeteilt in 12 Monate zu abwechselnd 30 und 29 Tage. Unter 30 Jahren treten 11 Schaltjahre zu 355 Tagen auf. Die mittlere Bewegung wird stets in Graden, Minuten und Sekunden angegeben. Bildet man die Differenztabellen, so findet man nicht durchwegs konstante Werte. Dieser Umstand verhindert es, die genaue mittlere Bewegung pro Tag zu berechnen. Will man daher die Angaben von Al-Khwārizmī mit den indischen Werten vergleichen, so muss man sie auf das indische System umrechnen. Die indische Astronomie gibt die Umdrehungszahlen pro Mahâyuga gleich 4 320 000 Jahre an, siehe [7]. Die verschiedenen indischen Systeme unterscheiden sich sowohl in den Umdrehungszahlen, wie auch in der Anzahl der Tage in einem Mahâyuga.

Das angegebene System von Brahmagupta gibt 1 577 916 450 Tage und somit die oben angegebene Länge des siderisches Jahres von 365; 15, 30, 22, 30 und als Umlaufszahlen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mond | 57 753 300 | Mars | 2 296 828,522 |
| Merkur | 17 936 998,984 | Jupiter | 364 226,455 |
| Venus | 7 022 389,492 | Saturn | 146 567,298 |

Rechnen wir nun die Bewegung der Sonne in einem Mahâyuga aus. In den ersten 30 arabischen Jahren zu 10 631 Tagen erhalten wir 37° 57′ 3″ + 29 360°. Für 570 Jahre rechnet Al-Kwārizmī 12 mal diesen Wert plus 7 mal einen um eine Sekunde grösseren Wert und erhält 1° 4′ 4″ + 553 360°. In einem Mahâyuga ergeben sich hieraus 4 319 999,986 Umläufe, also 0,014 zu wenig. Eine Fehlerrechnung zeigt, dass streng genommen der Fehler höchstens 0,006 betragen dürfte. Eine Zusatztafel von zweiter Hand erweitert die ursprügliche Tabelle auf 720 Jahre. Berechnet man die Umlaufszahl an Hand dieser erweiterten Tabelle, so erhält man einen Fehler von nur — 0,004, also ein best mögliches Ergebnis.

Entsprechende Berechnungen für den Mond und die übrigen Planeten lassen sich folgendermassen referieren:

Mond: Unsere Berechnungen ergeben einen Fehler von — 0,013 bei Verwendung der Tabelle für 570 Jahre, einen solchen von 0,019 bei Verwendung der ebenfalls aus zweiter Hand auf 720 Jahre verlängerten Tabelle. Der zu erwartende Fehler beträgt 0,006.

Jupiter: Der Fehler beträgt 0,011, was von der Grösse des zu erwartenden Fehlers ist.

Saturn: Der Fehler beträgt 2,032. Es scheint, dass Al-Khwārizmī sich für Saturn bereits einer Umdrehungszahl bediente, die erst etwas später in der indischen Astronomie verwendet wurde, Alkhwārizmī verwendte aber nicht diese Umdrehungszahl, sondern die von Alfazārī überlieferte von 146 569,284, siehe [8], S. 16. Ihr gegenüber beträgt der Fehler nur noch 0,05, was etwas über dem zu erwartenden liegt. Entsprechendes gilt für die Bewegung des Mondknotens.

Mars: Der Fehler beträgt — 0,005 und liegt innerhalb der Fehlergrenze.

Bei Venus beträgt der Fehler — 0,05, bei Merkur — 0,02, beide sind etwas grösser als die zu erwartenden.

Zusammenfassend können wir sagen, dass die Jahreslänge, die Umdrehungszahl von Mond, Jupiter und Mars bei Al-Khārizmī und Brahmagupta übereinstimmen, bei Venus und Merkur nur wenig differieren, während bei Saturn die Differenz über zwei Umdrehungen beträgt.

Wir glauben mit obigen Ausführungen einen neuen Beitrag zur Frage der Abhängigkeit von [1] von der indischen Astronomie zu liefern, siehe hierzu insbesondere auch die Ausführungen von Kennedy in [2] unter *Zīj*, 28.

## LITERATUR

[1] Die astronomischen Tafeln des... Al-Khwārizmī herausgegeben von H. Suter. Danske Vidensk. Selsk. Schrifter (7), *Hist.-fil. Afd.*, 3, 1 (Kopenhagen, 1914).

[2] E. S. Kennedy, A survey of islamic astronomical tables. *Trans. Amer. Philos. Soc.*, new series, 46, part 2 (1956), pp. 123-177.

[3] O. Neugebauer and Olaf Schmidt, Hindu astronomy at Newminster in 1428. *Ann. of sci.*, 8, 221-228 (1952).

[4] John Bentley, *A historical view of the Hindu Astronomy.* London, 1825.

[5] S. Davies, *Asiatick Researches*, 2 (1807).

[6] Colebrooke, *Asiatick Researches*, 12 (1818).

[7] B. L. van der Waerden, Diophantische Gleichungen und Planetenperioden in der indischen Astronomie. Vierteljashrsschrift *Naturf. Ges. Zürich*, 100 (1955), S. 153-170.

[8] *Alberuni's India*, by E. C. Sachau, Vol. II, London, 1910.

7. P.-D. Methée (Lausanne): *Transformées de Fourier de distributions invariantes.*

Dans un travail antérieur (*Comm. Math. Helv.*, vol. 28 (1954), p. 225-269) ont été déterminées toutes les distributions — au sens de M. Laurent Schwartz — qui sont invariantes par le groupe des rotations propres de Lorentz et qui vérifient l'équation des ondes $(\square + \varkappa)\, T = 0$: $\square$ est le dalembertien

$$\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

$\varkappa$ une constante quelconque.

Le but de cette communication est de montrer comment on peut déterminer les transformées de Fourier de celles de ces solutions qui sont tempérées. En particulier, pour $n = 4$ et $\varkappa > 0$, les résultats obtenus fournissent une justification rigoureuse des expressions symboliques classiquement utilisées en physique théorique pour la représentation dans l'espace de Fourier de certaines « fonctions singulières. »

On indique aussi comment obtenir les transformées de distributions invariantes étroitement liées aux solutions de l'équation des ondes: les distributions $H^k$ et $\overline{H}^k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) et les distributions $S^p$, $\overline{S}^p$, $\mathfrak{S}^p$ ($p$ nombre complexe quelconque).

8. S. Piccard (Neuchâtel): *Etude de la structure d'un groupe non libre à partir de certaines propriétés des relations caractéristiques liant un système donné d'éléments générateurs du groupe.*

Soit G un groupe fini ou infini non libre dont nous appelons multiplication la loi de composition, défini par un ensemble E d'éléments générateurs et une famille F de relations fondamentales qui les lie. Soit $n$ un entier $\geqslant 2$ et soit $e$ un sous-ensemble fini de E formé des éléments $a_1, \ldots, a_m$. Supposons que quelle que soit la relation $f = 1$ de la famille F, son premier membre $f$ qui est une composition finie d'un nombre fini d'éléments de E est de degré $\equiv 0 \pmod{n}$ par rapport à l'ensemble ou par rapport à chacun des éléments de $e$. Nous disons alors que G jouit de la propriété P (mod. $n$) par rapport à l'ensemble ou par rapport à chacun des éléments de $e$. Il est alors possible de répartir les éléments du groupe G en classes d'équivalence ayant la même puissance et pour lesquelles on peut définir une loi de composition commutative. On peut établir l'existence de sous-groupes distingués chez les groupes G jouissant des propriétés susmentionnées. L'étude est particulièrement intéressante si le groupe G possède un système fini d'éléments générateurs et s'il jouit de la propriété P (mod. $n$) par rapport à chaque élément d'un tel système. La plupart des résultats que nous avions établi dans le fascicule II du tome 35[e] (1956) du *Journal de mathématiques pures et appliquées*, Paris, pour les groupes d'ordre fini peuvent être étendus aux groupes ayant un nombre fini d'éléments générateurs.

On peut aussi se poser des problèmes plus généraux. Nous avons examiné le cas suivant. Soit encore G un groupe défini par un ensemble E d'éléments générateurs liés par une famille donnée F de relations fondamentales; soit $k$ un entier $\geqslant 2$, soient $n_1, \ldots, n_k$ $k$ nombres entiers dont chacun est $\geqslant 2$, soient $e_1, \ldots, e_k$ $k$ sous-ensembles finis de E et supposons que, quelle que soit la relation $f = 1$ de la famille F, son premier membre $f$ est de degré $\equiv 0$ (mod. $n_i$) par rapport à l'ensemble ou par rapport à chacun des éléments de l'ensemble $e_i$, $i = l, \ldots, k$. On peut dans ce cas généraliser les résultats mentionnés ci-dessus et établir de nombreux théorèmes relatifs à la structure du groupe G. En particulier, il existe une très jolie méthode de décomposition des éléments de G en classes d'équivalence permettant de rechercher aisément les sous-groupes distingués de G.

Il est aisé de donner des exemples de groupes infinis jouissant des propriétés signalées. Soient par exemple A et B deux points d'un axe, soit $a_1$ la symétrie par rapport à A, soit $a_2$ la symétrie par rapport à B et soit $a_1 a_2$ l'opération qui consiste à effectuer d'abord la symétrie par rapport à A puis celle par rapport à B. Avec cette loi de composition, $a_1$ et $a_2$ engendrent un groupe dénombrable caractérisé par les relations $a_1^2 = 1$, $a_2^2 = 1$ et ce groupe jouit de la propriété P (mod. 2) par rapport à chacun de ses deux éléments générateurs.

9. H. Loeffel (Zürich): *Beiträge zur Theorie der charakteristischen Funktionen stochastischer Verteilungen.*

(Erscheint in erweiterter Fassung in den *Mitteilungen schweizer. Versicherungs-Math.*, 1956, Heft 2.)