Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 2 (1956)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FONCTIONS ANALYTIQUES ET SURFACES DE RIEMANN

Autor: Choquet, Gustave

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32888

FONCTIONS ANALYTIQUES ET SURFACES DE RIEMANN[1]

PAR

Gustave CHOQUET, Paris

On désignera par C le plan complexe.

DÉFINITION 1: On appelle *germe* de fonction analytique tout couple $g = (z, A)$ où $z \in C$ et où A est une suite $(a_0, a_1, \ldots)$ de nombres complexes telle que $\lim\sup |a_n|^{\frac{1}{n}} < \infty$ (autrement dit telle que la série $\Sigma\, a_n x^n$ ait un rayon de convergence non nul).

On désigne par G l'ensemble de tous les germes.

Si $g = (z, A)$, z est le *support* de g; on désigne par φ l'application $g \rightarrow z$ et on l'appelle *projection* de G dans C; pour toute partie $X \in G$, l'ensemble $\varphi(X)$ est le *support* de X.

On appelle a_0 la *valeur principale* de g.

Topologie sur G.

1. Soit $g_0 = (z_0, A_0)$, et soit ρ_0 le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{a_n \in A_0} a_n z^n$. Pour tout ρ tel que $0 < \rho \leqslant \rho_0$, on appelle *rondelle ouverte* $\Delta(g_0, \rho)$, *de centre* g_0 *et de rayon* ρ, la partie de G constituée par les germes $g = (x, A)$ tels que $|x - z_0| < \rho$ et où A est la suite des coefficients du développement en série entière de $\sum\limits_n a_n z^n$ par rapport aux puissances de $\zeta = (z - x)$.

Tout point de G est évidemment centre de rondelles de rayon arbitrairement petit.

---

[1] J'ai essayé ici de définir correctement le prolongement analytique à partir de quelques notions topologiques courantes, d'une façon qui soit compréhensible par un bon étudiant de calcul différentiel et intégral.

Il est immédiat que tout point d'une rondelle ouverte Δ est centre d'une rondelle contenue dans Δ.

D'autre part, soient $g_1 = (z_1, A_1)$ et $g_2 = (z_2, A_2)$ deux germes distincts; ils sont centres de rondelles disjointes:

C'est évident si $z_1 \neq z_2$ car il suffit de prendre le rayon ρ de ces rondelles tel que $\rho < \frac{|z_1 - z_2|}{2}$.

Et si $z_1 = z_2$ cela résulte alors de ce que si deux rondelles Δ_1 et Δ_2 de même rayon, dont les centres g_1 et g_2 ont le même support, se rencontrent, ces rondelles sont identiques. En effet, ceci revient à dire que si deux fonctions f_1, f_2 analytiques dans un disque ouvert plan prennent en un point même valeur, ainsi que toutes leurs dérivées, elles sont identiques dans ce disque.

2. Appelons ouvert de G toute réunion de rondelles ouvertes. Il est immédiat que ces ouverts définissent bien une topologie sur G. Et d'après ce qui précède, cet espace G est séparé.

Chacun des points de G possède une base de voisinages constituée des rondelles ouvertes centrées en ce point.

La restriction de la projection φ à toute rondelle ouverte est biunivoque et bicontinue.

En particulier, tout point de G a un voisinage homéomorphe à un disque ouvert plan; comme G est séparé, G est donc localement compact.

Champ analytique.

Définition 2: On appelle *champ analytique* toute composante connexe $\mathcal{A}$ de G.

Ce qui précède montre que tout champ analytique est ouvert dans G (il est également fermé en tant que composante connexe). Donc tout champ analytique est localement compact et chacun de ses points g a une base de voisinages constituée des rondelles de G de centre g.

Surface de Riemann d'un champ analytique.
Fonction analytique.

Définition 3: Soit $\mathcal{A}$ un champ analytique; on appelle *surface de Riemann* de $\mathcal{A}$ le couple $(\mathcal{A}, \varphi)$ constitué par $\mathcal{A}$ et la restriction à $\mathcal{A}$ de la projection φ dans C.

DÉFINITION 4: Soit $\mathfrak{A}$ un *champ analytique*; on appelle *fonction analytique* du champ $\mathfrak{A}$ l'application $g \rightarrow a_0$ qui, à tout germe g de $\mathfrak{A}$ associe la valeur principale a_0 de g.

Soit F la fonction analytique de $\mathfrak{A}$; soit Δ une rondelle ouverte de $\mathfrak{A}$, de centre g_0. La restriction φ_Δ de φ à Δ étant biunivoque, la fonction $\mathrm{F}(\varphi_\Delta^{-1}(z))$ est bien définie dans le disque ouvert plan $\varphi(\Delta)$. Elle est identique dans ce disque à la fonction $\sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n$, si l'on a posé $g = (z_0; \{a_0, a_1, \ldots\})$.

Aussi l'étude de la fonction analytique F sur une rondelle peut-elle être remplacée par celle d'une fonction analytique (au sens classique) sur un disque ouvert plan.

Ce résultat s'étend à tout ouvert Ω de $\mathfrak{A}$ tel que la restriction de φ à ω soit biunivoque.

Ceci nous conduit à la définition suivante:

DÉFINITION 5: Soit $\mathfrak{A}$ un champ analytique et soit X une partie de $\mathfrak{A}$. On dit que X *recouvre une seule fois* son support si la restriction de φ à X est biunivoque.

Lorsque X recouvre une seule fois $\varphi(\mathrm{X})$, la restriction de φ à X est toujours une homéomorphie dans les deux cas suivants: X est ouvert ou compact.

DÉFINITION 6: Lorsque $\mathfrak{A}$ lui-même recouvre une seule fois son support, on dit que $\mathfrak{A}$ est un *champ analytique uniforme*. On convient alors de confondre $\mathfrak{A}$ avec la fonction holomorphe $\mathrm{F}(\varphi^{-1}(z))$ définie dans $\varphi(\mathfrak{A})$.

Pour tout domaine plan D, on démontre qu'il existe des champs uniformes $\mathfrak{A}$ dont le support est D.

PROLONGEMENT ANALYTIQUE.

DÉFINITION 7: Soit $(\Delta_i)_{i \in [1, n]}$ une suite finie de rondelles ouvertes de G, de centres g_i et de rayons ρ_i.

On dit que cette suite est une *chaîne* si, pour tout $i > 1$, g_i appartient à Δ_{i-1}. On dit que g_1 et g_n sont les extrémités de la chaîne (g_1 est l'origine et g_n la fin).

Remarque 1. — Notons ici pour la suite, qu'une chaîne est entièrement déterminée dès qu'on connaît son origine g_1, les supports des centres g_i, et les rayons ρ_i.

Théorème 1: Soient g et g' deux germes de G. Pour que g et g' soient les extrémités d'une chaîne, il faut et il suffit qu'ils appartiennent à un même champ analytique.

Démonstration. — Toute rondelle de G étant connexe, la réunion d'une suite finie de rondelles dont deux consécutives ont un point commun est connexe. Donc la condition est nécessaire.

Inversement, soit $\mathfrak{A}$ un champ analytique et soit $g \in \mathfrak{A}$. L'ensemble des points g' de $\mathfrak{A}$ tels que g' soit la fin d'une chaîne d'origine g est évidemment ouvert et fermé relativement à $\mathfrak{A}$, donc est identique à $\mathfrak{A}$.

Remarque 2. — Notons que cette conclusion subsisterait si on modifiait la définition d'une chaîne en imposant aux centres intermédiaires des rondelles d'une chaîne d'appartenir à une partie partout dense de $\mathfrak{A}$, et si l'on imposait aux rayons des rondelles d'appartenir à un ensemble dénombrable de nombres > 0 astreint seulement à contenir des éléments arbitrairement petits.

Corollaire. — Deux éléments quelconques g et g' d'un champ analytique $\mathfrak{A}$ appartiennent à une courbe qui est une réunion finie d'arcs simples ayant pour support des segments de droite.

Théorème 2 (Poincaré-Volterra):

1. Tout champ analytique $\mathfrak{A}$ est une réunion dénombrable de rondelles ouvertes (ce qui entraîne que $\mathfrak{A}$ a une base dénombrable constituée de rondelles ouvertes).

2. Pour tout $z \in C$, l'ensemble $\varphi^{-1}(z)$ des germes de $\mathfrak{A}$ de support z est au plus dénombrable.

Démonstration. — 1. Soit P une partie dénombrable partout dense du plan complexe C.

L'ensemble des points de $\mathfrak{A}$ dont le support est dans P est évidemment partout dense dans $\mathfrak{A}$. Donc, d'après le théorème 1 et la remarque 2, si l'on désigne par g un élément fixe quelconque de $\mathfrak{A}$ ayant son support dans P, le champ $\mathfrak{A}$ est la réunion des rondelles appartenant à des chaînes finies (Δ_i) d'origine g, de rayons ρ_i rationnels et dont les centres g_i ont leur support $\varphi(g_i) \in P$.

Une telle chaîne, d'après la remarque 1, est entièrement déterminée par la donnée de g, de la suite $(\varphi(g_i))$ et de la suite (ρ_i). Or l'ensemble des suites finies de couples $(\varphi(g_i), \rho_i)$ est au plus dénombrable; donc l'ensemble des chaînes considérées est au plus dénombrable. D'où la première partie du théorème.

2. Associons à tout $g \in \mathfrak{A}$ une rondelle $\Delta(g)$ de centre g, par exemple la rondelle maximale de centre g (c'est-à-dire la réunion des rondelles de centre g).

D'après une propriété soulignée précédemment si g_1 et g_2 ont même support z, $\Delta(g_1)$ et $\Delta(g_2)$ sont disjointes lorsque $g_1 \neq g_2$. Donc l'ensemble des rondelles $\Delta(g)$ associées aux germes $g \in \varphi^{-1}(z)$ est au plus dénombrable, puisque $\mathfrak{A}$ est à base dénombrable.

Autrement dit, $\varphi^{-1}(z)$ est au plus dénombrable.

Prolongement le long d'une courbe.

Définition 8: On appelle *courbe paramétrée* de G le couple constitué par une application continue f d'un intervalle I de R dans G, et *l'image* $f(I)$ de I.

Son origine est l'image $f(\alpha)$ de l'origine α de I (si I a une origine). On appelle *support* de la courbe G définie par f, la courbe paramétrée définie par l'application $\varphi(f) = \varphi \circ f$ de I dans C.

Comme l'image d'une courbe paramétrée est toujours connexe, l'image d'une courbe paramétrée de G est toujours contenue dans un champ analytique et un seul.

Théorème 3: Soit g_0 un élément d'un champ analytique $\mathfrak{A}$, et soit z_0 son support. Toute courbe paramétrée de C et d'origine z_0 est le support d'au plus une courbe paramétrée de $\mathfrak{A}$ et d'origine g_0.

Démonstration. — Soit $I = [\alpha, \beta[$ ou $[\alpha, \beta]$ l'intervalle sur lequel est définie la courbe $z(t)$ de C; on suppose que $z(\alpha) = z_0$. Soient f_1 et f_2 deux applications continues de I dans $\mathfrak{A}$ telles que $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = g_0$, et soit T l'ensemble des points $t \in I$ tels que $f_1(t) = f_2(t)$. Cet ensemble T est fermé relativement à I. D'autre part, si $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$, T est ouvert puisque l'application φ est localement une homéomorphie. Donc T est ouvert et fermé relativement à I; comme T n'est pas vide ($\alpha \in T$) et comme I est connexe, on a $I = T$. Autrement dit, $f_1 = f_2$.

Corollaire. — Soit γ une courbe paramétrée de C et d'origine z_0, définie par $z = z(t)$ $(t \in [\alpha, \beta])$.
Si γ n'est pas le support d'une courbe de $\mathfrak{A}$ d'origine g_0, il existe un point τ de $[\alpha, \beta]$ tel que la courbe $z = z(t)$ $(t \in [\alpha, \tau[)$ soit le support d'une courbe de $\mathfrak{A}$ d'origine g_0, mais qu'il n'en soit pas de même de la courbe $z = z(t)$ $(t \in [\alpha, \tau])$.

Lorsqu'il en est ainsi, on dit que le champ analytique $\mathfrak{A}$ est prolongeable à partir de g_0 sur γ jusqu'au point $(\tau, z(\tau))$ exclus, mais pas au-delà. On dit parfois aussi que g_0 et la courbe $z = z(t)$ $(t \in [\alpha, \tau[)$ définissent un *point singulier* du champ $\mathfrak{A}$.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, si $\rho(g)$ désigne le rayon de la rondelle maximale de centre g, $\rho(g(t)) \to 0$ lorsque $t \to \tau$ (où $g(t)$ est le point de $\mathfrak{A}$ associé à $z(t)$).

Théorème de monodromie.

On va énoncer ce théorème classique sous une forme en apparence moins générale, afin d'éviter le recours à la notion d'homotopie. L'énoncé général se déduirait du nôtre assez aisément, en utilisant des propriétés simples de l'homotopie.

Théorème 4: Soit $\mathfrak{A}$ un champ analytique; soit ω un ouvert de C homéomorphe à un disque ouvert plan, et soit g_0 un point de $\mathfrak{A}$ de support $z_0 \in \omega$.

Si toute courbe paramétrée $z(t)$ $(t \in I)$ de ω et d'origine z_0 est le support d'une courbe $f(t)$ $(t \in I)$ de $\mathfrak{A}$ et d'origine g_0, la réunion Ω des images $f(I)$ de ces courbes est un ouvert de $\mathfrak{A}$ qui recouvre ω une seule fois.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant, de nature purement topologique:

Lemme: Soit E un espace topologique quelconque et soit φ une application de E dans un espace séparé F. Soit K un compact de E. Si φ est continue en tout point de K, si la restriction de φ à K est biunivoque, et si φ est biunivoque au voisinage de tout point de K, φ est biunivoque au voisinage de K. [1]

Démonstration. — Soit ψ l'application (φ, φ) de E^2 dans F^2. Désignons par δ_E et δ_F les diagonales de E^2 et F^2. Les hypothèses se traduisent de la façon suivante:

(1) F séparé $\rightleftarrows$ δ_F est fermé dans F^2;

(2) K compact $\rightleftarrows$ K^2 compact;

(3) φ continue en tout point de K $\rightleftarrows$ ψ continue en tout point de K^2;

(4) restriction de φ à K biunivoque $\rightleftarrows$ $\psi(K^2 - \delta_E) \subset \complement\, \delta_F$;

(5) biunivocité locale de φ en tout point de K $\rightleftarrows$

$\delta_E \cap K^2$ a un voisinage V tel que $\psi(V - \delta_E) \subset \complement\, \delta_F$.

Des conclusions (1), (3), (4) résulte que $\psi^{-1}(\complement\, \delta_F)$ est un voisinage de $(K^2 - \delta_E)$; en rapprochant ce résultat de (5), on voit que K^2 possède un voisinage W tel qu'en tout point $(x, y) \in W - \delta_E$ on ait $\psi(x, y) \notin \delta_F$.

Or d'après (2), K^2 est compact, donc il existe un voisinage U de K tel que $U^2 \subset W$.

Autrement dit, pour tout couple (x, y) de points distincts de U, on a $(\varphi(x), \varphi(y)) \notin \delta_F$, c'est-à-dire $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Démonstration du théorème 4. — Par hypothèse, on a $\varphi(\Omega) = \omega$.

D'autre part, du fait que la restriction de φ à toute rondelle de $\mathcal{A}$ est une homéomorphie avec un disque ouvert de C résulte que Ω est un ensemble ouvert.

Il nous reste à montrer que la restriction de φ à Ω est biunivoque (ce sera donc aussi une homéomorphie).

[1] On dit qu'une application φ de E est biunivoque au voisinage d'un ensemble A de E si la restriction de φ à un voisinage de A est biunivoque.

Pour simplifier les notations, supposons que ω soit un disque ouvert de centre z_0 et de rayon 1. Le cas général se ramène immédiatement à celui-ci par homéomorphie.

Pour tout point z de ω distinct de z_0, le segment (z_0, z) définit la courbe γ : $\zeta = z_0 + t(z - z_0)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$; celle-ci est d'après l'hypothèse la projection d'un arc de $\mathcal{A}$ d'équation $f_z(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ avec $f_z(0) = g_0$. Posons $f_z(1) = g(z)$; on a par construction $\varphi(g(z)) = z$.

D'après le théorème 3, la fonction $g(z)$ est bien définie. Nous allons montrer que $g(z)$ est *continue.*

L'ensemble $f_z([0, 1])$ est un compact K de $\mathcal{A}$ tel que la restriction de φ à K soit biunivoque, puisque la courbe γ n'a pas de point double.

D'après le lemme précédent, K possède un voisinage U ouvert tel que la restriction φ_U de φ à U soit biunivoque, donc soit une homéomorphie. L'ensemble $V = \varphi(U)$ est un voisinage du segment (z_0, z); or V contient tout segment (z_0, z') où z' est un point assez voisin de z, donc U contient aussi tous les points $g(z')$ correspondants.

Autrement dit $g = \varphi_U^{-1}$ au voisinage de z; donc g est continue.

A toute courbe paramétrée $z(t)$ de ω et d'origine z_0 correspond la courbe $g(z(t))$ de $g(\omega)$ dont la projection sur C est identique à la courbe $z(t)$.

Donc l'ensemble Ω cherché n'est autre que $g(\omega)$. Par construction, cet ensemble recouvre ω une seule fois; comme g est biunivoque et que $g^{-1} = \varphi_{g(\omega)}$, $g(\omega)$ est un ouvert de $\mathcal{A}$ homéomorphe à ω.

Morceau de champ analytique.

Définition 9: On appelle *morceau de champ analytique* tout ouvert connexe non vide $\mathcal{M}$ de l'espace G des germes analytiques.

Il est immédiat qu'un morceau de champ analytique $\mathcal{M}$ appartient à un champ analytique $\mathcal{A}$ et à un seul, dont il constitue une partie ouverte.

Il est important de savoir reconnaître si un morceau de champ analytique $\mathcal{M}$ est un champ.

Une condition nécessaire et suffisante pour cela est évidemment que $\mathcal{M}$ soit fermé dans G. Nous allons traduire cette condition de façon plus commode:

Théorème 5. — Pour qu'un morceau de champ analytique $\mathcal{M}$ soit un champ, il faut et il suffit que, pour tout point $g \in \mathcal{M}$, toute rondelle Δ de centre g et de rayon fini soit contenue dans $\mathcal{M}$.

La condition est évidemment nécessaire. Inversement, supposons-la réalisée. Soit g un élément de G, limite de germes g_n de $\mathcal{M}$.

Dès que g_n est assez voisin de g, il existe une rondelle de centre g_n et contenant g; donc on a $g \in$ G. Autrement dit, $\mathcal{M}$ est fermé dans G; c'est donc bien un champ.

Corollaire 1. — Si un morceau de champ analytique $\mathcal{M}$ a pour support C et recouvre C une seule fois, $\mathcal{M}$ est un champ.

En effet, pour tout $g \in \mathcal{M}$ et tout $\rho > 0$, la rondelle $\Delta(g, \rho)$ est alors contenue dans $\mathcal{M}$.

On appelle un tel champ un *champ entier* ou plus simplement une fonction entière.

Corollaire 2. — Tout morceau de champ M qui contient un ouvert qui recouvre C une seule fois est identique à cet ouvert et est un champ entier.

Inverse d'un germe et inverse d'un champ.

Soient $v = f(u)$ et $u = g(z)$ deux fonctions holomorphes, l'une g au voisinage d'un point z_0, l'autre f au voisinage du point $u_0 = g(z_0)$. La fonction $h(z) = f(g(z))$ est holomorphe au voisinage de z_0.

Si $f(g(z)) \equiv z$ au voisinage de ce point, on a $f'(u_0)\, g'(z_0) = 1$, donc $f'(u_0)$ et $g'(z_0)$ ne sont pas nuls.

Inversement, si $g(z)$ est une fonction holomorphe au voisinage de z_0, avec $g'(z_0) \neq 0$, on sait qu'il existe une fonction $f(u)$ et une seule holomorphe au voisinage de $u_0 = g(z_0)$, et telle que $f(g(z)) \equiv z$ au voisinage de z_0.

Evidemment $f(u_0) = z_0$; la fonction $g(f(u))$ est donc définie au voisinage de u_0; et on a $g(f(u)) = u$ au voisinage de u_0.

Ces remarques montrent qu'à tout germe $g = (z_0; a_0, a_1, \ldots)$ tel que $a_1 \neq 0$, on peut associer un germe et un seul:

$$f = (a_0;\ z_0,\ 1/a_1,\ b_2, \ldots) \text{ tel que } f \circ g = (z_0;\ z_0,\ 1, 0, 0, \ldots)\ [1].$$

On note $f = g^{-1}$ et on l'appelle *germe inverse* de g. Ce qui précède montre que $(g^{-1})^{-1} = g$.

Désignons par G* l'ensemble des germes inversibles. L'application Φ de G* sur G* définie par $g \to g^{-1}$ est biunivoque et a pour carré l'identité.

C'est en outre une homéomorphie. Pour le voir, il suffit de vérifier que Φ est continue.

Or ceci résulte de ce que, avec les notations du début de ce paragraphe, si $f(u)$ et $g(z)$ sont deux fonctions localement inverses au voisinage de z_0 et u_0, le germe (z, A) où A est la suite $\left(f(z), \ldots, \frac{f^{(n)}(z)}{n!}, \ldots\right)$ a pour inverse le germe (u, B) où $u = f(z)$ et où B est la suite $\left(g(u), \ldots, \frac{g^{(n)}(u)}{n!}, \ldots\right)$.

Si $\mathcal{A}$ est un champ de G qui ne soit pas une fonction constante, et si on pose $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \cap \mathrm{G}^*$, l'ensemble $(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$ est fermé et discret (donc aussi dénombrable).

L'ensemble $\Phi(\mathcal{A}^*)$ est ouvert et connexe, donc appartient à un champ que l'on notera $\mathcal{B}$.

On a $\Phi(\mathcal{A}^*) \subset \mathcal{B}^*$; mais aussi $\Phi(\mathcal{B}^*) \subset \mathcal{A}^*$ d'où $\mathcal{B}^* \subset \Phi(\mathcal{A}^*)$, donc $\mathcal{B}^* = \Phi(\mathcal{A}^*)$.

Aussi appellerons-nous $\mathcal{B}$ le champ inverse de $\mathcal{A}$ et le noterons-nous $\mathcal{A}^{-1}$.

Nous venons de voir que, mis à part deux sous-ensembles dénombrables fermés et discrets, les champs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^{-1}$ sont homéomorphes dans l'homéomorphie Φ.

Pour éliminer les ensembles dénombrables exceptionnels, il faudrait modifier la définition des germes, en considérant comme germe tout développement (non uniforme) tel que $\left(\sum_0^\infty a_n z^{\frac{n}{p}}\right)$ où p est un entier > 0.

En fait, pour avoir une théorie entièrement satisfaisante, il faudrait aussi remplacer le plan C par le plan $\hat{\mathrm{C}}$ déduit de C

[1] Le germe $f \circ g$ se définit de façon évidente d'après ce qui précède.

par l'addition d'un point à l'infini (ce qu'on appelle aussi la sphère de Riemann).

Exemple. — Soit $\mathcal{A}$ le champ « entier » défini par la fonction entière e^z. La fonction e^z n'a sa dérivée nulle en aucun point, donc $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. D'autre part, e^z n'a pas de point critique (non étudié ci-dessus), donc on aura $(\mathcal{A}^{-1})^* = \mathcal{A}^{-1}$. On aura donc $\mathcal{A}^{-1} = \Phi(\mathcal{A})$.

En particulier $\mathcal{A}^{-1}$ sera homéomorphe à $\mathcal{A}$, donc aussi au plan C.

Le champ inverse de celui de e^z s'appelle logarithme et on note la fonction analytique de ce champ: $\log(g)$.

De la propriété $e^{z+i\pi} = e^z$ résulte que l'homéomorphie $g \to g'$ de G sur lui-même définie comme suit:

$$g' = (z;\, a_0 + 2i\pi,\, a_1, \ldots) \text{ si } g = (z;\, a_0,\, a_1, \ldots)$$

est une automorphie de $\mathcal{A}^{-1}$.