

SUR UN EXEMPLE DE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE

Autor(en): **de Rham, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-33737>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR UN EXEMPLE DE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE

PAR

G. DE RHAM, Lausanne

Soit $[y]$ le plus grand entier ne dépassant pas y et $\varphi(x) = \left| x - \left[x + \frac{1}{2} \right] \right|$ la différence prise en valeur absolue entre x et l'entier le plus voisin de x . *La fonction*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \varphi(2^k x)$$

est continue et n'admet de dérivée pour aucune valeur de x .

La continuité résulte immédiatement de ce que $f(x)$ est la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues. L'inexistence de la dérivée peut aussi s'établir très simplement. Pour cela, partons de la remarque que si $f(x)$ était dérivable pour $x = x_0$, sa pente moyenne

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

dans un intervalle (x_1, x_2) contenant x_0 tendrait vers une limite, égale précisément à $f'(x_0)$, lorsque la longueur de cet intervalle tend vers zéro. En particulier, la pente moyenne r_n de $f(x)$ dans l'intervalle $i_n = (2^{-n} [2^n x_0], 2^{-n} [2^n x_0] + 2^{-n})$ devrait tendre vers une limite pour $n \rightarrow \infty$. Or cela est impossible. En effet, la fonction $2^{-k} \varphi(2^k x)$ étant linéaire dans i_{k+1} avec une pente égale à ± 1 et s'annulant aux extrémités de i_n pour $n \leq k$, sa pente moyenne dans i_n est nulle pour $n \leq k$ et a toujours la même valeur ± 1 pour $n > k$; par suite, la différence de ses pentes moyennes dans i_{n+1} et dans i_n est nulle pour $k \neq n$ et vaut ± 1

pour $k = n$; cela entraîne immédiatement $r_{n+1} - r_n = \pm 1$, ce qui montre que r_n ne peut tendre vers une limite. C.Q.F.D.

Le même raisonnement montre que, si a est un entier positif pair,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \varphi(a^k x)$$

est une fonction continue sans dérivée. Pour $a = 10$, c'est l'exemple introduit par M. B. L. VAN DER WAERDEN [*Math. Zeitschr.*, 32 (1930), 474-475], qui prouve sa non dérivabilité par un raisonnement également très simple, dû à M. HEYTING, mais qui ne convient pas pour $a = 2$.

Cette fonction satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f(x) - a^{-1} f(ax) = \varphi(x)$$

dont elle est l'unique solution bornée. Il est intéressant de considérer plus généralement l'équation

$$F(x) - b F(ax) = g(x),$$

où $g(x)$ est une fonction donnée, a et b des constantes. Pour $0 < b < 1$, elle a une solution bornée, et une seule, qu'on obtient par la méthode d'itération,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k g(a^k x).$$

Cette fonction est évidemment continue si $g(x)$ est continue. Pour $g(x) = \cos x$, a entier impair et $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, on sait qu'elle n'a pas de dérivée: c'est l'exemple de WEIERSTRASS (voir par exemple GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, I, 73-75); mais la démonstration n'est pas aussi simple que pour $f(x)$.

Reçu le 23 novembre 1956.