1.2. Variétés à une dimension simplement connexes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Ces divers exemples montrent la grande diversité des variétés à une dimension, connexes et à base dénombrable. Une classification topologique de ces espaces paraît déjà assez compliquée.

Donnons encore un exemple qui donnera une faible idée de la complexité des variétés non séparées de dimension > 1. Soient E_1 et E_2 deux exemplaires de l'espace numérique R^2 à deux dimensions rapporté à un système de coordonnées polaires (r, ω). Soit ρ la relation d'équivalence dans l'espace somme Σ de E_1 et E_2 qui identifie tout point de E_1 de coordonnées (r, ω), $r < 1$, avec le point de E_2 de coordonnées $(r, \omega/1 - r)$ et qui se réduit à l'identité pour les autres points. L'espace quotient Σ/ρ est une variété à deux dimensions; l'image dans Σ/ρ de tout point de E_1 de coordonnées $(1, \omega_0)$ n'est séparée d'aucun point de l'image dans Σ/ρ du cercle $r = 1$ de E_2.

1.2. *Variétés à une dimension simplement connexes.*

Rappelons les définitions suivantes:

Définition 1: *Le couple* $(\tilde{V}, p)$ *formé d'un espace topologique* $\tilde{V}$ *et d'une application continue* p *de* $\tilde{V}$ *sur un espace topologique* V *est appelé un revêtement de* V, *si tout point de* V *possède un voisinage ouvert* U *tel que* $p^{-1}(U)$ *admette une partition en sous-ensembles ouverts* U_i *tels que la restriction de* p *à chacun d'eux soit un homéomorphisme sur* U.

Un espace topologique V sera dit *simplement connexe*, s'il est connexe et si pour tout revêtement connexe $(\tilde{V}, p)$ de V, la projection p est un homéomorphisme de $\tilde{V}$ sur V.

Définition 2: *Une variété à* n *dimensions* V_n *est dite orientable, s'il existe un atlas* A *de* R^n *sur* V_n *tel que tout changement de cartes associé à deux cartes de* A *soit un homéomorphisme direct (c'est-à-dire qui conserve l'orientation) d'un ouvert de* R^n *sur un ouvert de* R^n.

Les variétés construites dans les exemples 2 et 3 (pour n impair) ne sont pas orientables.

Si une variété V à une dimension peut être étalée dans la droite numérique R, alors V est nécessairement orientable. Par contre, une variété à une dimension orientable ne peut pas toujours être étalée dans R: il suffit de considérer le cas du cercle. Cependant, il est possible de démontrer la proposition suivante, qui sera utile par la suite.

PROPOSITION 1. *Soit* V *une variété à une dimension simplement connexe et à base dénombrable. Il existe alors une application continue* f *qui étale* V *dans la droite numérique.*

Nous utiliserons dans la démonstration le lemme suivant:

LEMME: *Si une variété* V *à une dimension est simplement connexe, le complémentaire d'un point quelconque* x *de* V *a deux composantes connexes.*

En effet, soit U un voisinage de x homéomorphe à un intervalle; le complémentaire de x dans U a deux composantes connexes U_+ et U_-. Considérons alors deux exemplaires V' et V'' du complémentaire de x dans V et soient U'_+, U'_- et U''_+, U''_- les correspondants de U_+, U_- dans V' et V''. Complétons l'espace somme $V' + V''$ par deux points x' et x'' admettant respectivement des voisinages U' et U'' tel que $U' \cap V' = U'_+$, $U' \cap V'' = U''_-$ et $U'' \cap V' = U'_-$, $U'' \cap V'' = U''_+$; on obtient ainsi un espace V qui, muni de sa projection naturelle p sur V (en particulier $p(x') = p(x'') = x$), est un revêtement à deux feuillets de V. Si le complémentaire de x dans V était connexe, V serait aussi connexe, ce qui est impossible puisque V est simplement connexe.

On peut montrer que réciproquement, si le complémentaire de tout point de V n'est pas connexe, alors V est simplement connexe.

Passons maintenant à la démonstration de la proposition. Il est possible de trouver une famille dénombrable de cartes h_i $(i = 1, 2, ...)$ de R dans V dont les buts 0_i recouvrent V. Comme V est connexe, on peut supposer que la numérotation des 0_i est faite de telle façon que $\Omega_n = \cup_{i=1,2,\dots,n} 0_i$ soit connexe, quel que soit l'entier n. Nous raisonnerons par récurrence. Supposons définie sur Ω_n une application continue f_n qui étale Ω_n dans l'intervalle $]-n, +n[$. Nous allons montrer que f_n peut être prolongée suivant une application f_{n+1} qui étale Ω_{n+1} dans l'intervalle $]-n-1, n+1[$.

Il résulte du lemme que $\Omega_n \cap 0_{n+1}$ est connexe, car si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver un point x tel que le complémentaire de x dans V soit connexe. Donc $h_{n+1}^{-1}(\Omega_n \cap 0_{n+1}) = \mathrm{I}$ est un intervalle ouvert de R et l'application $f_n\, h_{n+1}$ est une fonction continue, strictement monotone et inférieure en valeur absolue à n; elle peut être prolongée en une fonction φ continue sur R, strictement monotone et inférieure en valeur absolue à $n+1$. L'application φh^{-1} définie sur 0_{n+1} et l'application f_n coïncident sur $\Omega_n \cap 0_{n+1}$; leur réunion définit le prolongement cherché f_{n+1}.

1.3. *Variétés munies de structures différentiables.*

Définition 1: Une structure différentiable de classe C^r, r étant un entier positif ou ∞ (respectivement une structure analytique), sur une variété à n dimensions V_n est définie par la donnée d'un atlas A de R^n sur V_n tel que, pour tout couple de cartes h_i, $h_j \in A$, le changement de cartes $h_j^{-1}\, h_i$ soit un homéomorphisme r fois continûment différentiable (respectivement analytique) d'un ouvert de R^n dans R^n.

Une *fonction r-différentiable sur* V_n est une application f de V_n dans la droite numérique R telle que, pour toute carte $h_i \in A$, l'application fh_i soit une fonction r fois continûment différentiable sur R^n. Une fonction r-différentiable sur V_n est dite de *rang 1* au point $x \in V_n$, si pour une carte h_i dont le but contient x, l'application fh_i est une fonction dont au moins une dérivée partielle au point $h_i^{-1}(x)$ est différente de zéro; cette définition est évidemment indépendante de la carte choisie $h_i \in A$.

On définirait de même la notion d'applications r différentiables d'une variété V_n différentiable de classe C^r dans une variété différentiable V_m de classe C^r.

Une carte f de R^n dans V_n sera dite compatible avec l'atlas A, si pour tout $h \in A$, les changements de cartes $f^{-1}\, h$ et $h^{-1}\, f$ sont des homéomorphismes r-différentiables (ou analytiques) d'ouverts de R^n dans R^n. L'ensemble de toutes les cartes compatibles avec A forme l'atlas maximal $\bar{A}$ engendré par A. Deux sous-atlas de $\bar{A}$ définissent sur V_n la même structure de variété r-différentiable de classe C^r (ou analytique).