1.3. Variétés munies de structures différentiables.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Il résulte du lemme que $\Omega_n \cap 0_{n+1}$ est connexe, car si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver un point x tel que le complémentaire de x dans V soit connexe. Donc $h_{n+1}^{-1}(\Omega_n \cap 0_{n+1}) = \mathrm{I}$ est un intervalle ouvert de R et l'application $f_n\, h_{n+1}$ est une fonction continue, strictement monotone et inférieure en valeur absolue à n; elle peut être prolongée en une fonction φ continue sur R, strictement monotone et inférieure en valeur absolue à $n+1$. L'application φh^{-1} définie sur 0_{n+1} et l'application f_n coïncident sur $\Omega_n \cap 0_{n+1}$; leur réunion définit le prolongement cherché f_{n+1}.

1.3. *Variétés munies de structures différentiables.*

Définition 1: Une structure différentiable de classe C^r, r étant un entier positif ou ∞ (respectivement une structure analytique), sur une variété à n dimensions V_n est définie par la donnée d'un atlas A de R^n sur V_n tel que, pour tout couple de cartes h_i, $h_j \in A$, le changement de cartes $h_j^{-1}\, h_i$ soit un homéomorphisme r fois continûment différentiable (respectivement analytique) d'un ouvert de R^n dans R^n.

Une *fonction* r-*différentiable sur* V_n est une application f de V_n dans la droite numérique R telle que, pour toute carte $h_i \in A$, l'application fh_i soit une fonction r fois continûment différentiable sur R^n. Une fonction r-différentiable sur V_n est dite de *rang 1* au point $x \in V_n$, si pour une carte h_i dont le but contient x, l'application fh_i est une fonction dont au moins une dérivée partielle au point $h_i^{-1}(x)$ est différente de zéro; cette définition est évidemment indépendante de la carte choisie $h_i \in A$.

On définirait de même la notion d'applications r différentiables d'une variété V_n différentiable de classe C^r dans une variété différentiable V_m de classe C^r.

Une carte f de R^n dans V_n sera dite compatible avec l'atlas A, si pour tout $h \in A$, les changements de cartes $f^{-1}\, h$ et $h^{-1}\, f$ sont des homéomorphismes r-différentiables (ou analytiques) d'ouverts de R^n dans R^n. L'ensemble de toutes les cartes compatibles avec A forme l'atlas maximal $\overline{A}$ engendré par A. Deux sous-atlas de $\overline{A}$ définissent sur V_n la même structure de variété r-différentiable de classe C^r (ou analytique).

Propriété 1: Le branchement simple (exemple 1 *a)*) [de même que le lasso étranglé] est une variété à une dimension susceptible de deux structures de variétés différentiables de classe C^∞ non isomorphes.

Autrement dit, on peut munir le branchement simple de deux structures différentiables de classe C^∞ telles qu'il n'existe aucun homéomorphisme de classe C^∞ (ainsi que son inverse) de V muni de la première structure sur V muni de la seconde.

En reprenant les notations de l'exemple 1, R_1 et R_2 (identifiés à leurs images dans V) sont deux ouverts formant un recouvrement de V, le point de R_1 (respectivement R_2) d'abscisse t étant désigné par t_1 (respectivement t_2). On peut définir une structure différentiable de classe C^∞ sur V en se donnant deux cartes h_1 et h_2 de R sur R_1 et R_2 telles que $h_1^{-1} h_2$ et $h_2^{-1} h_1$ soient des homéomorphismes ∞-différentiables de la demi-droite $]-\infty, 0[$.

Première structure: elle est définie par $h_1(t) = t_1$ et $h_2(t) = t_2$.

Deuxième structure: elle est définie par $h_1(t) = t_1$ et $h_2(t) = t_2^3$.

Pour la première structure, la fonction qui au point t_1 ou t_2 prend la valeur t est une fonction ∞-différentiable sur V partout de rang 1. Par contre, pour la deuxième structure, tout fonction ∞-différentiable f sur V est de rang 0 au point $t = 0$. En effet, soient $f_1 = fh_1$ et $f_2 = fh_2$; de $f_1(t) = f_2 h_2^{-1} h_1(t)$ résulte $\left(\frac{d}{dt} f_1(t)\right)_{t=0} = 0$. Cette dernière circonstance établit la propriété 1 [6]. Remarquons que les deux structures définies ci-dessus sont même analytiques.

Il est clair qu'on pourrait multiplier les exemples. On comprendra facilement à partir de l'exemple précédent comment construire une structure différentiable de classe C^∞ sur une plume composée qui mette en évidence la propriété suivante:

---

[6] Dans un article récent [4], Milnor a construit deux structures différentiables non isomorphes sur la sphère S^7. Le résultat de Milnor est global; il s'agit ici au contraire d'une propriété locale, relative à un voisinage arbitraire d'un couple de points non séparés.

PROPRIÉTÉ 2: Il existe des variétés à une dimension (par exemple: la plume composée) susceptibles d'une structure différentiable de classe C^∞ telle que toutes les fonctions continûment différentiables sur ces variétés se réduisent à des constantes.

Les propriétés pathologiques mises en évidence ci-dessus conduisent à une notion de structure différentiable plus stricte pour laquelle les propriétés précédentes ne soient plus valables.

DÉFINITION 2: Une structure différentiable de classe C^r sur une variété V_n est dite *régulière* si pour toute fonction r-différentiable définie sur un voisinage de $x \in V_n$, il existe une fonction r-différentiable f' définie sur V_n telle que f et f' coïncident sur un voisinage de x.

Toute structure différentiable de classe C^r sur une variété *séparée* V_n est régulière. La deuxième structure différentiable définie sur le branchement simple n'est pas régulière.

Nous utiliserons dans la démonstration de la proposition 1 ci-dessous le

LEMME: Soit V une variété munie d'une structure différentiable régulière de classe C^r. Si une fonction r-différentiable f sur V est de rang 1 en un point x de V, elle est également de rang 1 en tout point y non séparé de x.

Pour simplifier les notations, nous démontrerons ce lemme dans le cas où V est une variété à une dimension. Soient h_1 et h_2 deux cartes de R dans V telles que $h_1(0) = x$ et $h_2(0) = y$. L'application $h = h_2^{-1} h_1$ est un homéomorphisme r-différentiable, ainsi que son inverse, d'un ouvert U_1 de R sur un ouvert U_2 de R, l'origine 0 appartenant à l'adhérence de U_1 et U_2; les fonctions $f_1 = fh_1$ et $f_2 = fh_2$ sont r-différentiables dans R et la dérivée $f_1'(0)$ de f_1 à l'origine n'est pas nulle. Soit $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ une suite de points de U_1 tels que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$; en posant $\bar{t}_n = h(t_n)$, on a aussi $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{t}_n = 0$. Comme $f_1'(t_n) = f_2'(\bar{t}_n)\, h'(t_n)$ pour tout n, si la $\lim\limits_{n\to\infty} f_2'(\bar{t}_n) = f_2'(0)$ était nulle, alors $\lim\limits_{n\to\infty} h'(t_n)$ serait infinie; mais alors si g est une fonction r-différentiable sur V et de rang 1 en y (une telle fonction existe toujours en vertu de l'hypothèse de régularité), avec les notations correspondantes, $\lim\limits_{n\to\infty} g_1'(t_n)$ serait infinie, ce qui est impossible. Donc $f_2'(0) \neq 0$.

La proposition 1 de 1.2 peut être précisée de la manière suivante:

PROPOSITION 1: *Sur toute variété à une dimension* V *munie d'une structure différentiable régulière de classe* C^r, *simplement connexe et à base dénombrable, il existe une fonction* r-*différentiable* f *partout de rang 1.*

Autrement dit, la variété V peut être étalée dans R par une application r-différentiable f partout de rang 1.

Nous supposerons connu le lemme suivant:

LEMME: Soit $f(t)$ une fonction r-différentiable définie sur un ouvert I' de la droite numérique R et dont la dérivée est différente de zéro en tout point d'un intervalle fermé $I < I'$; la restriction de f à I peut se prolonger suivant une fonction r-différentiable sur R et de dérivée non nulle en tout point de R.

Soit A l'atlas de R sur V qui définit la structure différentiable de classe C^r sur V. La marche générale de la démonstration est celle de la proposition 1 de 1.2. Reprenons les mêmes notations en supposant cette fois que chaque 0_i est l'image de l'intervalle I: $]-1, +1[$ par un homéomorphisme h_i qui se prolonge suivant un homéomorphisme $\tilde{h}_i \in$ A de R dans V. On suppose définie sur Ω_n une fonction r-différentiable f_n partout de rang 1 et telle que pour tout 0_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, la fonction $f_n h_i$ qui est définie sur I se prolonge suivant une fonction r-différentiable sur R partout de rang 1. On va montrer que f_n peut se prolonger suivant une fonction r-différentiable f_{n+1} sur Ω_{n+1} jouissant des mêmes propriétés.

Comme $\Omega_n \cap 0_{n+1}$ est connexe, $f_n h_{n+1}$ est une fonction r-différentiable sur un intervalle $]t_0, t_1[$ contenu dans I et à dérivée non nulle. Les ensembles $h_{n+1}^{-1}(0_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ sont des intervalles ouverts qui recouvrent $]t_0, t_1[$; soit 0_k un ouvert tel que $h_{n+1}^{-1}(0_k)$ soit un intervalle de la forme $]t_0, t_2[$, $(t_2 \leqslant t_1)$. Par l'hypothèse de récurrence, la fonction $f_n h_k$ se prolonge sur R suivant une fonction $\hat{f}_k$ partout de rang 1. Soit t_0' le point de l'intervalle $[-1, +1]$ défini par $t'_0 = \lim_{t \to t_0} \tilde{h}_k^{-1} h_{n+1}(t)$ et soit $x' = \tilde{h}_k(t'_0)$; le point $x = \tilde{h}_{n+1}(t_0)$ n'est pas séparé de x'. Il existe une fonction r-différentiable g dans V qui coïncide avec $\hat{f}_k \tilde{h}_k^{-1}$ sur un voisinage de x'; comme g est de rang 1 en x', elle l'est également en x (lemme 1). La fonction qui est égale à gh_{n+1} sur l'intervalle $]-\infty, t_0]$ et à $f_n h_{n+1}$ sur $]t_0\, t_1[$ est r-différentiable sur $]-\infty, t_1[$ car les deux fonctions $g\tilde{h}_{n+1}$ et $f_n h_{n+1}$ coïncident dans un intervalle $]t_0, t'_2[$. En répétant la même construction pour t_1, on obtient une fonction définie sur R de rang 1 sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ et dont la restriction à $]t_0, t_1[$ coïncide avec $f_n h_{n+1}$; d'après le lemme 2, il existe une fonction r-différentiable $\hat{f}_{n+1}$ qui prolonge $f_n h_{n+1}$ et qui est partout de rang 1. La fonction f_{n+1} cherchée est égale à f_n sur Ω_n et à $\hat{f}_{n+1} h_{n+1}^{-1}$ sur 0_n.

Corollaire: Toutes les structures différentiables sur la droite numérique R sont équivalentes.

Soit R la droite numérique munie de sa structure différentiable ordinaire et R′ la droite numérique munie d'une structure différentiable de classe C^r. D'après la proposition, il existe une application r-différentiable partout de rang 1 de R′ sur R (en faisant au besoin une homothétie convenable). Comme cette application est biunivoque, c'est un isomorphisme de classe C^r de R′ sur R (muni de sa structure différentiable ordinaire de classe C^r).

2. Les structures feuilletées du plan.

2.1. *Rappel de définitions et de propriétés classiques.*

Définition 1: *Une structure feuilletée* (F) *sur une variété à deux dimensions* V_2 *est définie par un atlas* A *de* R^2 *sur* V_2 *tel que si* h_i *et* h_j *sont deux cartes quelconques de* A, *le changement de cartes* $h_{ji} = h_j^{-1} h_i$ *est un homéomorphisme d'un ouvert* U_{ji} *de* R^2 *sur un ouvert de* R^2 *qui, au voisinage de tout point de* U_{ji} *s'exprime par des équations de la forme:*

$$x' = g_{ji}(x, y) \qquad y' = k_{ji}(y) \; . \tag{1}$$