Classification des structures feuilletées du plan.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

aux quotients une fonction r-différentiable g' sur V' qui coïncide avec f' au voisinage de x'.

Démonstration du théorème 4.

Il est en général nécessaire de supposer que Ω est borné pour que le théorème de Kamke soit vrai, comme le montre l'exemple suivant.

Soient 0_1 et 0_2 deux exemplaires du plan R^2; dans l'espace somme $0_1 + 0_2$ considérons la relation d'équivalence qui identifie les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) tels que $x_2 = x_1 + 1/y_1$, $y_2 = y_1^3$ pour tout $y_1 < 0$ et qui se réduit à l'identité pour les points tels que $y_1 \geqslant 0$ ou $y_2 \geqslant 0$. L'espace quotient E est homéomorphe au plan R^2; les deux cartes 0_1 et 0_2 forment un atlas qui définit sur E une structure feuilletée analytique dont l'espace des feuilles est le branchement simple muni de la deuxième structure différentiable définie dans 1.3, propriété 1.

Cet exemple permet de bien comprendre la construction de l'exemple de Wazewsky. En particulier, il est facile d'imaginer une structure feuilletée de classe C^∞ dont l'espace des feuilles soit une plume composée V (cf. 1.1, ex. 5) munie d'une structure différentiable de classe C^∞ telle que toute fonction différentiable sur V se réduise à une constante.

Classification des structures feuilletées du plan.

Le problème de la classification des structures feuilletées du plan a été résolu complètement par Kaplan [3]. Nous allons indiquer brièvement et sans démonstration comment nos méthodes permettent également de résoudre ce problème.

La seule considération de l'espace quotient V associé au feuilletage ne suffit pas à le caractériser. Pour cela, il faut introduire une relation d'ordre parmi les points de branchement. Soit V une variété à une dimension simplement connexe et orientée, et soit A un atlas de R sur V définissant une orientation de V. Soient x_1 et x_2 deux points de V qui ne sont pas séparés. Nous dirons que x_1 et x_2 ne sont pas séparés à droite (respectivement à gauche) et nous écrirons $x_1 \sim x_2$ mod. λ^+ (respectivement λ^-) si, étant données deux cartes h_1 et h_2 de A telles

VARIÉTÉS (NON SÉPARÉES) A UNE DIMENSION ET STRUCTURES FEUILLETÉES DU PLAN

PAR

André HAEFLIGER, Paris, et Georges REEB, Grenoble

paru dans le vol. III, fasc. 2, à placer à la page 125.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENDIXON, Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Mathematica*, 24 (1901), pp. 1-80.
[2] KAMKE, Über die partielle Differentialgleichung $fz_x + gz_y = h$. *Math. Zeitschr.*, vol. 4 (1936), pp. 56-66 et vol. 42 (1936), pp. 287-300.
[3] KAPLAN, Regular curve families filling the plane I, II. *Duke Journ.*, 7 (1940), pp. 154-185 et 8 (1941), pp. 11-46.
[4] J. MILNOR, On manifolds homeomorphic to the 7 sphere. *Annals of Math.*, 64 (1956), pp. 399-405.
[5] POINCARÉ, Sur les courbes définies par les équations différentielles. *Œuvres*, tome I.
[6] G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. *Act. Scient. et Ind.*, 1183, Hermann, 1952.
[7] T. WAZEWSKY, Sur l'équation Pp + Qq = 0. *Mathematica*, 8 (1934), pp. 103-116; 9 (1935), pp. 179-182.

---

vide-leer-empty

que $h_1(0) = x_1$ et $h_2(0) = x_2$, $h_2^{-1} h_1$ est défini pour des points d'abscisse > 0 (respectivement < 0). Ces deux relations sont des relations d'équivalence. Chaque classe contient un nombre fini ou dénombrable de points.

Appelons *structure feuilletée orientée du plan* R^2 une structure feuilletée du plan orienté R^2 avec une orientation cohérente des feuilles et disons que deux structures feuilletées orientées du plan sont équivalentes s'il existe un homéomorphisme de R^2 sur R^2 qui transporte la première structure munie de son orientation sur la seconde structure munie de son orientation. (Remarquons que toute structure feuilletée du plan peut être orientée.)

On montre alors que l'espace des feuilles V de toute structure orientée du plan est une variété à une dimension orientée pour laquelle un ordre est déterminé canoniquement dans chaque classe d'équivalence modulo λ^+ ou λ^-. On dira que la variété orientée V est munie d'une structure d'ordre.

Deux structures feuilletées orientées du plan sont équivalentes si et seulement s'il existe un homéomorphisme de l'espace des feuilles de la première structure sur l'espace des feuilles de la deuxième structure qui conserve la structure d'ordre.

Enfin, à toute variété à une dimension à base dénombrable, simplement connexe, orientée et munie d'une structure d'ordre, correspond une structure feuilletée du plan.

Reçu le 6 décembre 1956.