

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 3 (1957)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES FORMULES D'INTÉGRATION DE L'ANALYSE VECTORIELLE  
**Autor:** Kervaire, Michel A.  
**Kapitel:** 5. Bord algébrique d'une surface, d'un volume.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-33741>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 21.12.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

sera dit *dégénéré* si l'une des dérivées partielles  $\mathbf{r}_u$  ou  $\mathbf{r}_v$  (ou les deux) s'annule identiquement. On a une définition similaire pour un morceau de volume  $V$ , représenté par  $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$  qui sera dit *dégénéré* si l'une au moins des dérivées partielles  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  est identiquement nulle.

*On convient, dans le calcul avec les courbes, surfaces ou volumes, de ne pas distinguer entre éléments qui ne diffèrent que par une combinaison linéaire de morceaux dégénérés* (par élément, nous entendons courbe, surface ou volume suivant le cas). Par exemple, si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux morceaux dégénérés, on écrira  $2S_1 + S_2 - S_3 = -S_3$  (« on néglige les éléments dégénérés » est une forme souple pour l'expression rigoureuse : on passe dans le groupe quotient modulo le sous-groupe engendré par les éléments dégénérés).

#### 5. BORD ALGÈBRIQUE D'UNE SURFACE, D'UN VOLUME.

Le bord d'une surface sera une courbe (surface et courbe étant pris au sens des paragraphes précédents). Soit  $S$  une surface, on notera  $bS$  son bord <sup>4</sup>. On exige que le bord soit linéaire, i.e. si  $S_1 = n_1 S_1 + n_2 S_2$  (au sens de l'addition des surfaces), on exige que  $bS = n_1 bS_1 + n_2 bS_2$  (au sens de l'addition des courbes). Grâce à la linéarité <sup>5</sup>, pour définir le bord d'une surface quelconque, il suffit de définir le bord d'un morceau de surface. Soit  $\mathbf{r}(u, v)$  un tel morceau ( $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ ), disons  $S$ . Il s'agit de définir  $bS$ . Soient  $C_i, i = 1, 2, 3, 4$  les courbes définies par les fonctions  $\mathbf{r}_i(t)$  suivantes :

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(1, t), \quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}(0, t), \quad \mathbf{r}_3(t) = \mathbf{r}(t, 1), \quad \mathbf{r}_4(t) = \mathbf{r}(t, 0) \quad (5.1)$$

(ce sont bien des morceaux de courbe car  $t$  varie dans le bon intervalle et les dérivées premières sont continues). On pose, par définition

$$bS = C_1 - C_2 - C_3 + C_4 \quad (5.2)$$

(où  $-C$  est mis pour  $(-1)C$ ).

<sup>4</sup> La notation usuelle (en topologie algébrique) est  $\partial S$ .

<sup>5</sup> On vérifiera que le bord d'un élément dégénéré est dégénéré. Ceci nous garantit que l'exigence de la linéarité n'est pas en contradiction avec la convention de négliger les éléments dégénérés.

Pour le bord d'un volume, on procède de façon semblable: le bord sera linéaire, i.e.  $bV = n_1 bV_1 + n_2 bV_2$  (au sens de l'addition des surfaces) si  $V = n_1 V_1 + n_2 V_2$ . Il suffit donc de dire ce qu'est le bord d'un morceau de volume. Soit  $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$  un morceau  $V$ , son bord  $bV$  est la surface définie comme suit: Soient  $S_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  les morceaux de surfaces définis par  $\mathbf{r}_i(u, \varphi)$  comme suit:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(u, \varphi) &= \mathbf{r}(1, u, \varphi) , & \mathbf{r}_2(u, \varphi) &= \mathbf{r}(0, u, \varphi) \\ \mathbf{r}_3(u, \varphi) &= \mathbf{r}(u, 1, \varphi) , & \mathbf{r}_4(u, \varphi) &= \mathbf{r}(u, 0, \varphi) \\ \mathbf{r}_5(u, \varphi) &= \mathbf{r}(u, \varphi, 1) , & \mathbf{r}_6(u, \varphi) &= \mathbf{r}(u, \varphi, 0) . \end{aligned} \quad (5.3)$$

Le bord  $bV$  est la surface, combinaison linéaire des  $S_i$  à coefficients entiers, donnée par

$$bV = S_1 - S_2 - S_3 + S_4 + S_5 - S_6 . \quad (5.4)$$

Rappelons que dans ces expressions pour le bord on devra « négliger » les morceaux dégénérés s'il s'en présente.

## 6. REMARQUES ET EXEMPLES.

Il y a deux différences essentiellement entre courbes, surfaces et volumes introduits au § 3 et les notions habituelles:

- 1° un morceau est muni d'une *paramétrisation* inhérente à sa définition. La figure géométrique « cercle » ne devient une courbe (ou éventuellement un morceau de courbe) qu'après que l'on a fait choix d'une paramétrisation. Ceci est sans doute contraire à l'idée géométrique, mais c'est adapté à l'intégration;
- 2° courbes, surfaces et volumes trouvent certes leur origine dans les notions géométriques et analytiques de morceaux de courbe, surface, volume; cependant ce sont essentiellement des objets algébriques avec lesquels on calcule formellement comme avec des formes linéaires d'indéterminées à coefficients entiers.

On peut naturellement paramétriser un *cercle* d'une infinité de manières. On en fait, par exemple, un morceau en prenant

$$\mathbf{r}(t) = \{ R \cos(2\pi t), R \sin(2\pi t), 0 \}, \quad R = \text{rayon}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (6.1)$$