7. La formule de Stokes.

de l'application $\mathbf{r}(u, v)$. L'essentiel ici est bien entendu de voir que la formule du bord montre que le bord du ruban de Möbius n'est pas la seule courbe frontière (au sens intuitif) qui est représentée par $(-1)(C_2 + C_3)$ avec nos notations, mais pour la paramétrisation ci-dessus $b\mathrm{S} = 2C_1 + (-1)(C_2 + C_3)$, la contribution de la courbe C_1 étant tout à fait inattendue de l'intuition. Si l'on prend l'expression correcte ci-dessus pour le bord, la formule de Stokes est alors valable, comme il sera démontré au paragraphe suivant.

7. La formule de Stokes.

On définit comme suit les intégrales curvilignes et de surface. Soit $\mathbf{F}$ un champ de vecteurs (fonction associant à tout point d'une région de l'espace un vecteur qui dépend de manière continue de l'argument), l'intégrale $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de $\mathbf{F}$ le long de la courbe C est définie d'abord dans le cas où C est un morceau. On pose

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{r}^{\cdot}(t)\, dt\,, \tag{7.1}$$

où $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $\mathbf{r}(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}$ étant la fonction qui définit C. Dans le cas plus général où C est une courbe: $C = n_1 C_1 + \dots + n_k C_k$, où $C_1, \dots, C_k$ sont des morceaux, on pose

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i n_i \int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}\,. \tag{7.2}$$

Pour l'intégrale de surface, l'exigence de la linéarité[7] permet à nouveau de n'avoir à donner de formule explicite que dans le cas du morceau. Soir $\mathbf{r}(u, v)$ un morceau de surface S ($0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 1$). On pose

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint \mathbf{F}(u, v) \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\, du dv \tag{7.3}$$

[7] La non-contradiction de cette exigence avec la convention de négliger les éléments dégénérés est aisément vérifiée en constatant que l'intégrale étendue à un morceau dégénéré est nulle.

où l'intégrale double (de la fonction numérique $\mathbf{F}(u, v) \, . \, \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$) est étendue au carré unité $0 \leqq u, v \leqq 1$. On a dénoté par $\mathbf{F}(u, v)$ le vecteur $\mathbf{F}(x_1(u, v)\, x_2(u, v), x_3(u, v))$, où $\mathbf{r}(u, v) = \{x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)\}$.

Soit S une surface dont les morceaux admettent des dérivées partielles *secondes* continues et $\mathbf{F}$ un champ de vecteur. Le théorème de Stokes affirme que

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \, . \, d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \, . \, d\mathbf{r} \, , \qquad \text{où} \qquad C = bS \, , \tag{7.4}$$

pourvu que $\mathbf{F}$ ait des dérivées partielles premières continues dans une région contenant S.

Démonstration. — Il est suffisant de se limiter au cas où S est un *morceau* de surface si: $S = n_1 S_1 + \ldots + n_k S_k$, où les S_i sont des morceaux, alors

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \, . \, d\mathbf{S} = \sum_1^k n_i \int_{S_i} \nabla \times \mathbf{F} \, . \, d\mathbf{S}$$

et si l'on sait que (7.4) vaut pour un morceau, on en tire

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \, . \, d\mathbf{S} = \sum_1^k n_i \int_{S_i} \nabla \times \mathbf{F} \, . \, d\mathbf{S} = \sum_1^k n_i \oint_{bS_i} \mathbf{F} \, . \, d\mathbf{r} = \oint_{bS} \mathbf{F} \, . \, d\mathbf{r} \, ,$$

car

$$bS = \sum_1^k n_i \, bS_i \, .$$

Soit donc S un morceau $\mathbf{r}(u, v)$, $0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 1$. On a besoin de la formule auxiliaire

$$\nabla \times \mathbf{F} \, . \, \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \mathbf{F}_u \, . \, \mathbf{r}_v - \mathbf{F}_v \, . \, \mathbf{r}_u = (\mathbf{F} \, . \, \mathbf{r}_v)_u - (\mathbf{F} \, . \, \mathbf{r}_u)_v \, , \tag{7.5}$$

la deuxième égalité étant triviale (continuité des dérivées partielles secondes de $\mathbf{r}$).

On a

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \, . \, d\mathbf{S} = \iint \nabla \times \mathbf{F} \, . \, \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \, du dv = \iint (\mathbf{F} \, . \, \mathbf{r}_v)_u \, du dv - \\ - \iint (\mathbf{F} \, . \, \mathbf{r}_u)_v \, du dv \, .$$

Par intégration partielle de la première intégrale selon u et de la seconde selon v, il vient (avec les notations de (5.1)):

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 (\mathbf{F}(1, v) \cdot \dot{\mathbf{r}}_1 - \mathbf{F}(0, v) \cdot \dot{\mathbf{r}}_2)\, dv - \int_0^1 (\mathbf{F}(u, 1) \cdot \dot{\mathbf{r}}_3 - \mathbf{F}(u, 0) \cdot \dot{\mathbf{r}}_4)\, du$$

et en appelant t la variable d'intégration dans chaque intégrale:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 (\mathbf{F}(1, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_1\, dt - \int_0^1 \mathbf{F}(0, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}_2\, dt - \int_0^1 \mathbf{F}(t, 1) \cdot \dot{\mathbf{r}}_3\, dt + \int_0^1 \mathbf{F}(t, 0) \cdot \dot{\mathbf{r}}_4\, dt = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \text{ (cf. (7.2))}.$$

Il reste à prouver la formule (7.5), ce qui est mécanique: Comme $\mathbf{F}$ intervient linéairement dans (7.5), il suffit de démontrer cette formule pour un champ spécial de la forme $\mathbf{F} = f\mathbf{a}$, où $\mathbf{a}$ est un vecteur constant et f une fonction numérique (en effet, en choisissant une base vectorielle $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, on a bien $\mathbf{F} = f_1\, \mathbf{a}_1 + f_2\, \mathbf{a}_2 + f_3\, \mathbf{a}_3$. Si la formule (7.5) est prouvée pour chaque $f_i\, \mathbf{a}_i$ elle l'est par linéarité pour $\mathbf{F}$ lui-même). Soit donc $\mathbf{F} = f\mathbf{a}$, la formule à prouver se réduit à $\nabla \times f\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = f_u\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_v - f_v\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_u$. On a

$$\nabla \times f\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \nabla f \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v,$$

d'après (2.3), puis

$$= \begin{vmatrix} \nabla f \cdot \mathbf{r}_u & \nabla f \cdot \mathbf{r}_v \\ a \cdot \mathbf{r}_u & a \cdot \mathbf{r}_v \end{vmatrix}, \text{ d'après (2.1)},$$

$$= \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_u & \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_v \end{vmatrix}, \text{ d'après (2.2), c.q.f.d.}$$