8. La formule de Gauss-Ostrogradski

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

8. La formule de Gauss-Ostrogradski

se présente de façon tout à fait semblable à la formule de Stokes. Définissons tout d'abord l'intégrale de volume. Soit V un volume combinaison linéaire de morceaux: $V = \Sigma_i n_i V_i$. En postulant

$$\int_V f dV = \Sigma_i n_i \int_{V_i} f dV ,$$

on ramène la définition de $\int_V f dV$ au cas spécial où V est un morceau $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$, $0 \leqq u_1, u_2, u_3 \leqq 1$. Dans ce cas, on pose

$$\int_V f dV = \iiint f(u_1, u_2, u_3)(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)\, du_1\, du_2\, du_3 , \tag{8.1}$$

où $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ est le produit mixte $\mathbf{r}_1 \,.\, \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3$ des vecteurs dérivées partielles $\mathbf{r}_i = \partial \mathbf{r}/\partial u_i$. L'intégrale triple (8.1) est étendue au cube unité $0 \leqq u_1 \leqq 1$, $0 \leqq u_2 \leqq 1$, $0 \leqq u_3 \leqq 1$.

Le théorème de Gauss affirme que dans le domaine de différentiabilité (continue) du champ $\mathbf{F}$, on a

$$\int_V \nabla \,.\, \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{S} , \quad \text{où} \quad S = bV . \tag{8.2}$$

On suppose de nouveau que les morceaux constituant V admettent des dérivées partielles *secondes* continues.

A cause de la linéarité de l'intégrale, il est de nouveau suffisant de démontrer cette formule dans le cas particulier où V est un morceau $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$. On se sert à cet effet de la formule auxiliaire:

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \nabla \,.\, \mathbf{F} &= (\mathbf{F}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + (\mathbf{F}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1) + (\mathbf{F}_3, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \\ &= (\mathbf{F}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)_1 + (\mathbf{F}, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1)_2 + (\mathbf{F}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)_3 ,\end{aligned} \tag{8.3}$$

où la deuxième égalité est triviale (les indices indiquent la dérivation partielle). On a

$$\int_V \nabla \,.\, \mathbf{F} dV = \iiint (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \nabla \,.\, \mathbf{F} du_1\, du_2\, du_3 ,$$

soit, d'après (8.3),

$$= \iiint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)_1 \, du_1 \, du_2 \, du_3 + \iiint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1)_2 \, du_1 \, du_2 \, du_3 + \\ + \iiint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)_3 \, du_1 \, du_2 \, du_3 \, .$$

En effectuant l'intégration partielle de la première intégrale suivant u_1, de la seconde suivant u_2, de la troisième suivant u_3, il vient :

$$\int_V \nabla \, . \, \mathbf{F} dV = \iint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)_{u_1=1} \, du_2 \, du_3 - \iint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)_{u_1=0} \, du_2 \, du_3 \\ + \iint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1)_{u_2=1} \, du_1 \, du_3 - \iint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1)_{u_2=0} \, du_1 \, du_3 \\ + \iint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)_{u_3=1} \, du_1 \, du_2 - \iint (\mathbf{F}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)_{u_3=0} \, du_1 \, du_2 \, .$$

Appelons u, v les variables d'intégration dans les six intégrales ci-dessus. En reprenant les notations de (5.3), on a

$$\int_V \nabla \, . \, \mathbf{F} dV = \iint \mathbf{F}(1, u, v) \, . \, \mathbf{r}_{1u} \times \mathbf{r}_{1v} \, du dv - \iint \mathbf{F}(0, u, v) \, . \, \mathbf{r}_{2u} \times \mathbf{r}_{2v} \, du dv \\ + \iint \mathbf{F}(u, 1, v) \, . \, \mathbf{r}_{3v} \times \mathbf{r}_{3u} \, du dv - \iint \mathbf{F}(u, 0, v) \, . \, \mathbf{r}_{4v} \times \mathbf{r}_{4u} \, du dv \\ + \iint \mathbf{F}(u, v, 1) \, . \, \mathbf{r}_{5u} \times \mathbf{r}_{5v} \, du dv - \iint \mathbf{F}(u, v, 0) \, . \, \mathbf{r}_{6u} \times \mathbf{r}_{6v} \, du dv \, , \\ = \int_{S_1} \mathbf{F} \, . \, d\mathbf{S} - \int_{S_2} \mathbf{F} \, . \, d\mathbf{S} - \int_{S_3} \mathbf{F} \, . \, d\mathbf{S} + \int_{S_4} \mathbf{F} \, . \, s\mathbf{S} + \int_{S_5} \mathbf{F} \, . \, d\mathbf{S} - \int_{S_6} \mathbf{F} \, . \, d\mathbf{S} \, , \\ = \int_{S_1 - S_2 - S_3 + S_4 + S_5 - S_6} \mathbf{F} \, . \, d\mathbf{S} = \oint_{bV} \mathbf{F} \, . \, d\mathbf{S} \, .$$

Il reste à prouver la formule (8.3), ce qui est à nouveau mécanique. Il est suffisant de prouver la formule pour $\mathbf{F} = f\mathbf{a}$, où $\mathbf{a}$ est un vecteur constant. La formule à démontrer se réduit à

$$f_{u_1} (\mathbf{a}, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + f_{u_2} (\mathbf{a}, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1) + f_{u_3} (\mathbf{a}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \, \mathbf{a} \, . \, \nabla f \, ,$$

ou encore

$$f_1 (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) + f_2 (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) + f_3 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \, \nabla f \, .$$

On utilise

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \, . \, \mathbf{c}) \, \mathbf{b} - (\mathbf{a} \, . \, \mathbf{b}) \, \mathbf{c} \qquad (8.4)$$

en posant tout d'abord $\mathbf{a} = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{b} = \nabla f$, $\mathbf{c} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3$, d'où

$$\mathbf{r}_1 \times (\nabla f \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \, \nabla f - f_1 (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) \, ,$$

car $f_1 = \nabla f \, . \, \mathbf{r}_1$, d'après (2.2).

En appliquant encore (8.4), cette fois avec $\mathbf{a} = \nabla f$, $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2$, $\mathbf{c} = \mathbf{r}_3$:

$$\nabla f \times (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = f_3 \cdot \mathbf{r}_2 - f_2 \cdot \mathbf{r}_3 \, ,$$

et par suite

$$f_3 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) - f_2 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3) = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \nabla f - f_1 (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) \, ,$$

ce qui est essentiellement la formule à démontrer.

Remarque. — L'analogie entre les démonstrations des théorèmes de Stokes et de Gauss n'est pas fortuite. Tous deux sont en fait des cas particuliers d'un seul et unique théorème beaucoup plus général dont la démonstration n'est pas essentiellement différente de celle présentée ci-dessus. (Cf. par exemple A. Lichnerowicz, *Algèbre et Analyse linéaires*, § 148 ou B. Eckmann, *Differentiable manifolds*, Lecture Notes of the University of Michigan, 1950.)

Séminaire de physique théorique de l'Université de Berne
et
Dept. of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology.

Reçu le 7 janvier 1957.