

# PROPOS DU TRANCHET D'ARCHIMÈDE

Autor(en): **Thébault, Victor**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-33742>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# A PROPOS DU TRANCHET D'ARCHIMÈDE

PAR

Victor THÉBAULT, Tennie (France)

---

Ce sujet d'étude auquel nous avons déjà consacré plusieurs articles <sup>1</sup>, montre clairement les avantages que peut offrir la méthode de l'inversion en tant que moyen de démonstration. Il est évident que du choix judicieux du pôle et du module d'une telle transformation, dépendent la simplicité et la précision des développements. A titre d'exemple, nous généralisons et complétons une précédente note <sup>2</sup>.

I. Aux extrémités A et B d'une corde fixe d'un cercle (O), de rayon R, on trace, d'abord, deux cercles (O<sub>1</sub>), (O<sub>2</sub>), de rayons R<sub>1</sub>, R<sub>2</sub>, tangents au cercle (O) en A et B et se coupant en un point C sur la droite AB; ensuite, les cercles (ω<sub>1</sub>), (ω<sub>2</sub>), (ω<sub>3</sub>), ..., (ω<sub>n</sub>), de rayons ρ<sub>1</sub>, ρ<sub>2</sub>, ρ<sub>3</sub>, ..., ρ<sub>n</sub>, tangents entre eux de proche en proche et tangents aux cercles (O), (O<sub>1</sub>). Il y a deux chaînes (C<sub>1</sub>), (C<sub>2</sub>) de cercles (ω<sub>1</sub>), (ω<sub>2</sub>) ..., (ω<sub>n</sub>) tangents au cercle (O<sub>1</sub>), au-dessus et au-dessous de AB, et deux autres chaînes (γ<sub>1</sub>), (γ<sub>2</sub>) de cercles tangents au cercle (O<sub>2</sub>), au-dessus et au-dessous de AB. Les propriétés fondamentales de ces chaînes étant analogues, nous examinerons celles de (C<sub>1</sub>) et (C<sub>2</sub>).

Pour tout ce qui suit, le point C varie sur la droite AB. Dans cette hypothèse, il est clair que les cercles (O<sub>1</sub>), (O<sub>2</sub>) se rencontrent sous l'angle constant  $2(AB, AO) = 2\theta$ .

D'autre part, une inversion  $i \equiv (A, AB^2)$ , de pôle A, de module AB<sup>2</sup>, transforme le cercle (O) en la droite By perpendiculaire à AO, le cercle (O<sub>1</sub>) en une autre droite C<sub>0</sub> x<sub>0</sub>, parallèle à By, et passant par le transformé C<sub>0</sub> de C; enfin, (O<sub>2</sub>) devient

---

<sup>1</sup> *L'Ens. math.*, vol. 33, 1934, pp. 349-359; 1935, vol. 35, pp. 309-324.

<sup>2</sup> *Ibid.*, vol. 1951-1954, pp. 62-69.

un cercle ( $O'_2$ ) qui passe par  $C_0$  et coupe la droite  $C_0 x_0$  sous l'angle  $2\theta$ . Dans cette transformation, les cercles  $(\omega_1), (\omega_2), \dots, (\omega_n)$  deviennent les cercles  $(\omega'_1), (\omega'_2), \dots, (\omega'_n)$ , égaux entre eux, de rayons  $\rho$ , tangents aux droites  $By, C_0 x_0$  et, de proche en proche, aux cercles  $(O'_2), (\omega'_1), \dots, (\omega'_{n-1})$ .

ENVELOPPE DU CERCLE  $(\omega_n)$ , D'INDICE DONNÉ  $n$ , DE LA CHAÎNE  $(C_1)$ . — Soient  $D_1, D_2, \dots, D_n$  les points de contact, sur la droite  $By$ , des cercles  $(\omega'_1), (\omega'_2) \dots, (\omega'_n)$  relatifs à une position arbitraire du point  $C$  sur la droite  $AB$ . Puisque la droite  $C_0 x_0$  coupe le cercle  $(O'_2)$ , de rayon  $R'_2$ , sous l'angle  $2\theta$ ,

$$(1) \quad \rho = \frac{1}{2} (BO'_2 + BO'_2 \cos 2\theta) = \frac{R'_2}{2} (1 + \cos 2\theta) .$$

D'autre part, si  $N$  désigne le point de contact des cercles  $(O'_2)$  et  $(\omega'_1)$ ,  $M$  le milieu de  $D_1 B$ , on obtient, d'abord,

$$D_1 B = 2 MN = 2 \sqrt{R'_2 \cdot \rho} ,$$

ensuite, d'après (1),

$$(2) \quad \frac{D_1 B}{D_1 \omega'_1} = \frac{D_1 B}{\rho} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}} = \frac{2}{\cos \theta} .$$

De même,

$$(3) \quad \frac{D_2 B}{D_2 \omega'_2} = \frac{D_2 B}{\rho} = \frac{2\rho + D_1 B}{\rho} = 2 + \frac{2}{\cos \theta} = \frac{2}{\cos \theta} (1 + \cos \theta) ,$$

$$\frac{D_3 B}{D_3 \omega'_3} = \frac{2}{\cos \theta} \cdot (1 + 2 \cos \theta) , \quad \frac{D_4 B}{D_4 \omega'_4} = \frac{2}{\cos \theta} (1 + 3 \cos \theta) , \dots ,$$

et finalement

$$(4) \quad \frac{D_n B}{D_n \omega'_n} = \frac{2}{\cos \theta} [1 + (n - 1) \cos \theta] .$$

Par suite, quelle que soit la position de  $C$  sur  $AB$ , l'indice  $n$  étant donné, la cotangente (4) de l'angle  $(B\omega'_n, By)$  reste constante. La droite  $B\omega'_n$ , ainsi que la seconde tangente  $Bt$  au cercle

$(\omega'_n)$ , symétrique de  $By$  par rapport à  $B\omega'_n$ , sont deux droites fixes comme  $By$ .

*Conséquence.* — L'inversion  $i$  transforme la droite  $Bt$  en un cercle  $(\Gamma_n)$ , de centre  $\Gamma_n$ , passant par  $A$  et  $B$ , et tangent extérieurement au cercle  $(\omega_n)$  transformé de  $(\omega'_n)$ . Les cercles fixes  $(O)$ ,  $(\Gamma_n)$  constituent l'enveloppe de  $(\omega_n)$ .

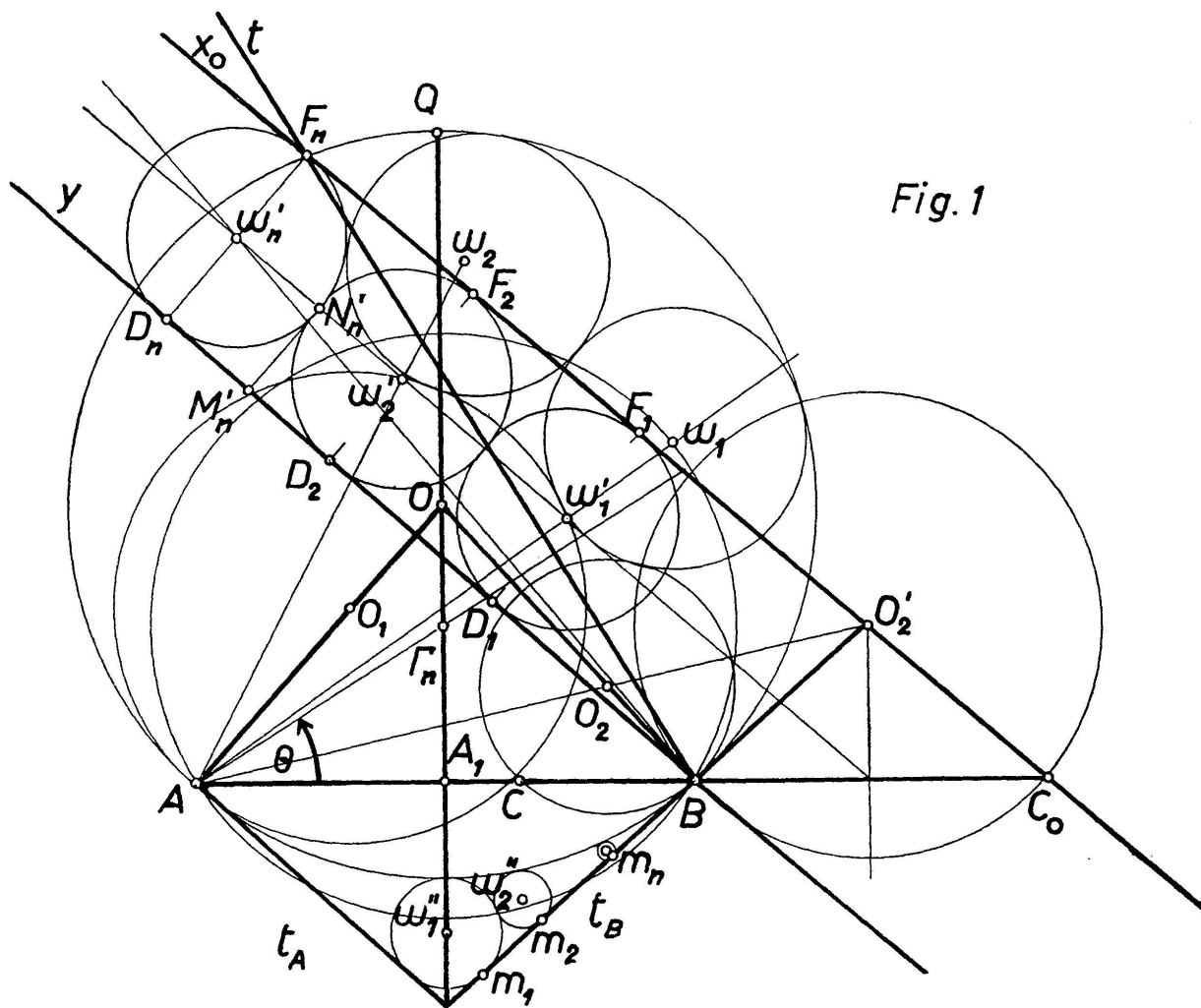


Fig. 1

LIEU DU CENTRE  $\omega_n$  DU CERCLE  $(\omega_n)$ . — Il est clair que le point  $\omega_n$  décrit un arc de l'ellipse  $(E_n)$ , de foyers  $O$  et  $\Gamma_n$ , passant par  $A$  et  $B$  et au-dessus de  $AB$ .

N.B. — Mêmes conclusions pour la chaîne  $C_2$  lorsque le point  $C$  se déplace sur la droite  $AB$ . Le cercle  $(\omega_n)$ , d'indice donné  $n$ , de cette chaîne, enveloppe  $(O)$  et un cercle  $(\Gamma'_n)$ , passant en  $A$  et  $B$  et au-dessous de  $AB$ . Le point  $\omega_n$  décrit un arc de l'ellipse  $(E'_n)$ , de foyers  $O$ ,  $\Gamma'_n$ , passant par  $A$  et  $B$  et au-dessous de  $AB$ . Mêmes conclusions aussi avec les chaînes  $(\gamma_1)$ ,  $(\gamma_2)$ . En résumé, les enveloppes de quatre cercles  $(\omega_n)$  de ces chaînes se

composent du cercle (O) associé à quatre autres cercles, et les lieux des centres  $\omega_n$ , des arcs de quatre ellipses passant en A et B, et ayant un foyer commun O.

2. L'ellipse ( $E_n$ ) est déterminée par ses foyers O et  $\Gamma_n$  et ses points A et B. Cependant, on peut préciser son excentricité  $e_n$  et la position de sa directrice  $\Delta_n$  relative au foyer O. Soient un cercle ( $\omega_n$ ), de rayon  $\rho_n$ , dont le centre  $\omega_n$  est sur ( $E_n$ ), au-dessus de la droite AB;  $y_n$  l'ordonnée de ce point par rapport à AB. L'excentricité

$$(5) \quad e_n = \frac{\omega_n O}{\omega_n X} = \frac{R - \rho_n}{\frac{R}{e_n} - y_n} = \frac{\rho_n}{y_n},$$

X désignant la projection orthogonale de  $\omega_n$  sur  $\Delta_n$ ; car B étant sur ( $E_n$ ),

$$X \omega_n + y_n = \frac{R}{e_n}.$$

Introduisons maintenant l'inversion  $j \equiv (C, \overline{CA} \cdot \overline{CB})$ , de pôle C, qui conserve (O) et transforme les cercles ( $O_1$ ), ( $O_2$ ) en les tangentes  $t_B$ ,  $t_A$  au cercle (O) en B, A, puis les cercles ( $\omega_1$ ), ( $\omega_2$ ), ..., ( $\omega_n$ ), de rayons  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ , ...,  $\rho_n$ , en ceux de la chaîne ( $\omega_1''$ ), ( $\omega_2''$ ), ..., ( $\omega_n''$ ), de rayons  $r_1$ ,  $r_2$ , ...,  $r_n$  tangents à (O) et à  $t_B$  en  $m_1$ ,  $m_2$ , ...,  $m_n$ .

Il est clair que

$$Bm_1 = 2 \sqrt{R \cdot r_1}, \dots, m_{n+1} m_n = 2 \sqrt{r_n \cdot r_{n+1}},$$

ce qui donne

$$(6) \quad \sqrt{R \cdot r_1} = \sqrt{R \cdot r_2} + \sqrt{r_1 \cdot r_2}, \quad \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{R}}, \dots$$

et ainsi de suite, puis

$$(7) \quad \frac{1}{\sqrt{r_n}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

D'autre part, puisque ( $\omega_1''$ ), tangent à (O),  $t_A$ ,  $t_B$ , est indépendant de la position de C sur AB, il en est de même pour les cercles ( $\omega_2''$ ), ..., ( $\omega_n''$ ). L'indice  $n$  étant donné, les rapports (5) sont donc

constants pour le centre du cercle ( $\omega_n$ ), et, pour cause d'homothétie, il suffit d'évaluer le rapport  $\frac{r_n}{y_n} = e_n$ ,  $y'_n$  étant l'ordonnée de  $\omega_n$  pour la droite AB. Or, d'après (6), (7), on obtient, de proche en proche,

$$r_1 = \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \cdot R = \left( \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 \cdot R ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}} = \left[ \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + n - 1 \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} , \quad mm_n = 2 \sqrt{R \cdot r_n} ,$$

et enfin, d'une part<sup>3</sup>,

$$(8) \quad e_n = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{R}{\rho_n} \cos \theta + \sin \theta}} =$$

$$= \frac{1}{2(n-1) \cos \theta - \sin \theta + 2} , \quad \left( -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} , \quad 0 < e_n < 1 \right) ;$$

d'autre part, la distance

$$(9) \quad \frac{R}{e_n} = [2(n-1) \cos \theta - \sin \theta + 2] \cdot R$$

de AB à la directrice  $\Delta_n$ . Puisque les relations (9), (10) ne dépendent que de l'indice  $n$ , ces formules s'appliquent à l'ellipse ( $E'_n$ ) pour laquelle  $e'_n = e_n$  dont la directrice relative au foyer O, est symétrique de  $\Delta_n$  par rapport à AB, et aux ellipses analogues associées aux chaînes ( $\gamma_1$ ), ( $\gamma_2$ ) de cercles.

PROBLÈME. — *L'indice  $n$  étant donné, construire le point C de manière que le cercle ( $\omega_n$ ) soit le plus grand.*

D'après ce qui précède, le centre  $\omega_n$  du plus grand cercle ( $\omega_n$ ), de rayon  $\rho_n$  correspondant à l'indice donné  $n$ , coïncide nécessairement, au-dessus de AB, avec le sommet  $S_n$  de l'ellipse ( $E_n$ ) sur laquelle il est situé et dont l'excentricité  $e_n$  ne dépend que de  $n$ ,  $R$ ,  $\theta$ . En effet, puisque

$$(10) \quad \rho_n = e_n \cdot y_n ,$$

<sup>3</sup> J. AUDERSSON, *Mathesis*, 1956, p. 556.

le maximum de  $\rho_n$  correspond à celui de l'ordonnée  $y_n$  de  $S_n$  par rapport à AB. Or, les égalités

$$y_n = \rho_n = OS_n + OA_1 = R(1 + \sin \theta),$$

donnent

$$(11) \quad \rho_n = \frac{e_n}{1 + e_n} (1 + \sin \theta) \cdot R.$$

Le cercle cherché, de centre  $\omega_n \equiv S_n$ , tangent intérieurement au cercle (O), est donc déterminé. On peut aussi le construire, ainsi que les cercles  $(\omega_{n+1}), \dots, (\omega_1)$ , en considérant le point de rencontre  $D_n$  de  $By$  avec la droite  $AQ_n$  joignant A au point  $Q_n$  où la médiatrice de AB coupe le cercle (O) au-dessus de AB.

D'après (4), le rayon

$$\rho = BD_n \cdot \frac{\cos \theta}{2[1 + (n-1) \cos \theta]} = D\omega'_n$$

du cercle  $(\omega'_n)$ , transformé de  $(\omega_n)$  par  $i$ , étant connu, on obtient sur la droite  $By$ , à partir de  $D_n$ , les points  $D_{n-1}, \dots, D_1$ , les centres des cercles  $(\omega'_n), (\omega'_{n-1}), \dots, (\omega'_1)$ , par suite les points  $\omega_n = S_n, \omega_{n-1}, \dots, \omega_1$  et le point C sur AB correspondant à l'indice donné  $n$ .

**3. LIEU DU POINT DE CONTACT AVEC  $(O_1)$  DU CERCLE  $(\omega_n)$ , D'INDICE DONNÉ  $n$ .** — Les transformés des points de contact  $f_1, f_2, \dots, f_n$  des cercles  $(\omega_1), (\omega_2), \dots, (\omega_n)$  avec le cercle  $(O_1)$  par l'inversion  $i$ , se confondent avec les points de contact  $F_1, F_2, \dots, F_n$  des cercles  $(\omega'_1), (\omega'_2), \dots, (\omega'_n)$  avec la droite  $C_0 x_0$ . Or, en vertu de (4),

$$\cot (BF_n, BD_n) = \frac{BD_n}{D_n F_n} = \frac{BD_n}{2\rho} = \frac{1 + (n-1) \cos \theta}{\cos \theta}.$$

le point de contact  $f_n$  du cercle  $(\omega_n)$ , d'indice donné  $n$ , avec  $(O_1)$ , décrit donc au-dessus de AB, un arc du cercle transformé de la droite fixe  $BF_n$  par l'inversion  $i$ , et passant en A et B.

**LIEU DU POINT DE CONTACT DU CERCLE  $(\omega_{n-1})$  ET DU CERCLE  $(\omega_n)$ , D'INDICE DONNÉ  $n$ .** — La distance  $N'_n M'_n$  de la droite  $By$  au point de contact  $N'_n$  des cercles  $(\omega'_{n-1}), (\omega'_n)$ , transformé du point de contact  $N_n$  de  $(\omega_{n-1})$  et  $(\omega_n)$ , étant égale au rayon  $\rho$  des

cercles  $(\omega'_{n-1}), (\omega'_n)$ , en raison de (4), on obtient, de proche en proche,

$$\begin{aligned} \cot (\text{BN}'_n, \text{By}) &= \frac{\text{BM}'_n}{\text{M}'_n \text{N}'_n} = \frac{\text{BD}_n - \text{M}'_n \text{D}_n}{\rho} = \frac{\text{BD}_n - \rho}{\rho} = \\ &= \frac{\text{BD}_n}{\rho} - 1 = \frac{2}{\cos \theta} [1 + (n - 2) \cos \theta]. \end{aligned}$$

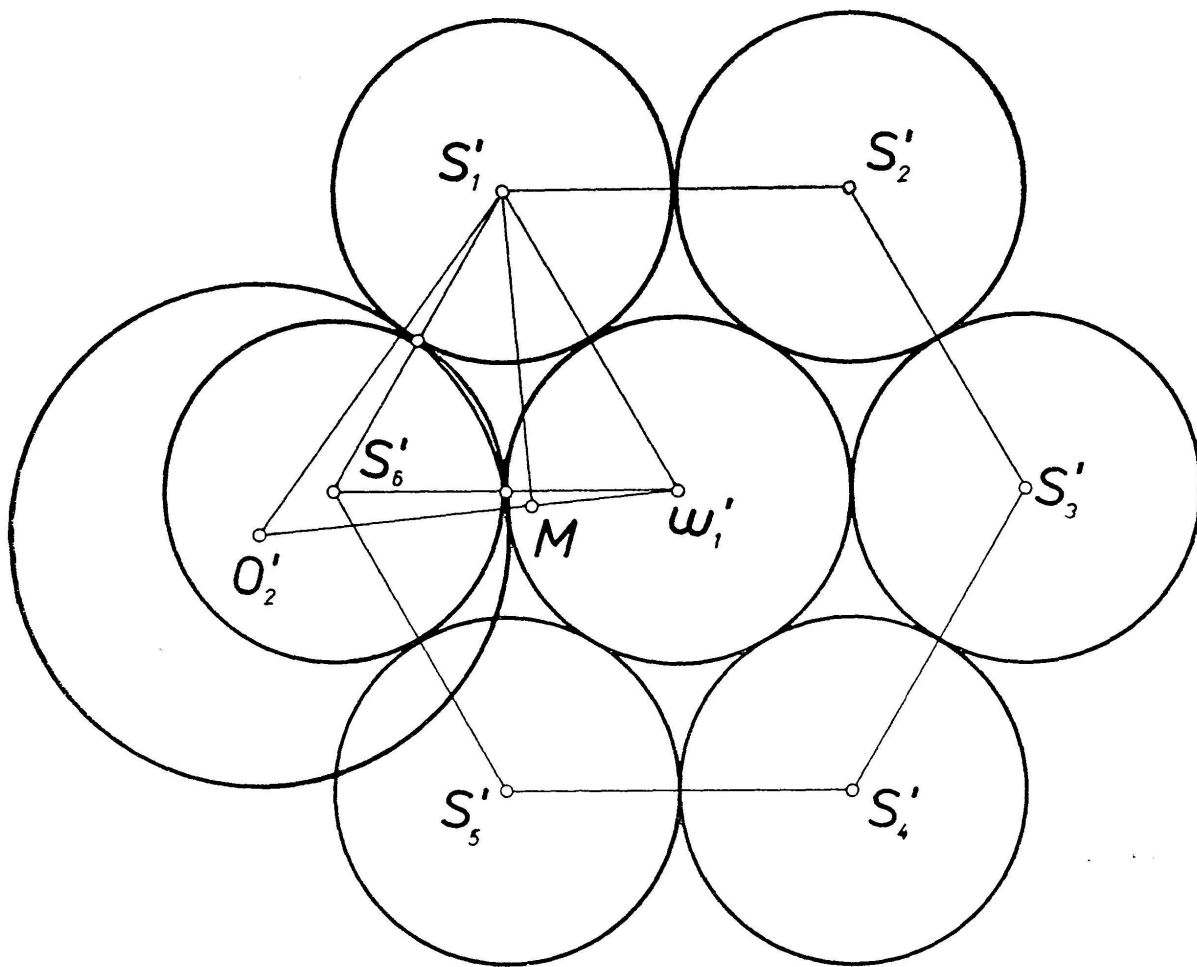


Fig. 2

Lorsque  $C$  varie sur  $AB$ , entre  $A$  et  $B$ , le contact  $N_n$  de  $(\omega_{n-1}), (\omega_n)$  décrit donc un arc du cercle transformé de la droite fixe  $\text{BN}'_n$  par l'inversion  $i$  et passant en  $A$  et  $B$ .

N.B. — Mêmes conclusions pour les lieux des points de contact des cercles analogues des autres chaînes.

4. UNE EXTENSION A L'ESPACE. — Conservons la figure 1 située dans un plan  $(P)$  et décrivons les sphères  $(O), (O_1), (O_2)$ ,



( $\omega_1$ ) sur les cercles de mêmes noms comme grands cercles, puis traçons la sphère ( $S_1$ ) tangente aux quatre précédentes. Si le point C se déplace, entre A et B, sur le diamètre fixe AB, les sphères ( $O_1$ ), ( $O_2$ ), ( $\omega_1$ ), varient aussi et la sphère ( $S_1$ ) qui leur est tangente, enveloppe la sphère fixe (O) et une autre sphère fixe ( $\Gamma_1$ ) déterminée en transformant la figure par une inversion  $i \equiv (A, AB^2)$ . En effet, dans cette transformation, la sphère (O) devient le plan ( $\Delta$ ) perpendiculaire au plan (P) et au rayon AO et qui passe par B; la sphère ( $O_1$ ), le plan ( $\pi$ ) parallèle à ( $\Delta$ ) et passant par le transformé  $C_0$  de C par  $i$ ; ( $O_2$ ), une sphère ( $O'_2$ ) décrite sur  $BC_0$  comme diamètre; ( $\omega_1$ ), une sphère ( $\omega'_1$ ) tangente à ( $\Delta$ ), ( $\pi$ ), ( $O'_2$ ); ( $S_1$ ), une sphère ( $S'_1$ ) tangente à ( $\Delta$ ), ( $\pi$ ), ( $O'_1$ ), ( $\omega'_1$ ), égale à ( $\omega'_1$ ) et de rayon  $\rho$ . D'autre part, si  $S'_1$  se projette orthogonalement en M, N sur les plans (P), ( $\Delta$ ) respectivement,  $O'_2 \omega'_1 S'_1$  est un triangle isocèle ( $O'_2 \omega'_1 = O'_2 S'_1$ ), dont la hauteur  $S'_1 M$  a pour mesure

$$S'_1 M = \frac{2\rho}{1 + \cos^2 \theta} \sqrt{1 + 2 \cos^2 \theta},$$

car

$$\omega'_1 M = 2\rho \sin \frac{1}{2} (O'_2 \omega'_1, O'_2 S'_1), \sin \frac{1}{2} (O'_2 \omega'_1, O'_2 S'_1) = \frac{\cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}.$$

Comme  $S'_1 N = \rho$ , on obtient la suite de rapports égaux

$$(12) \quad \frac{S'_1 M}{S'_1 N} = \frac{S'_1 M}{\rho} = \frac{2}{1 + \cos^2 \theta} \sqrt{1 + 2 \cos^2 \theta}$$

dont il résulte, si le point C varie entre A et B sur AB, que le plan ( $By, S'_1$ ) reste fixe ainsi que le second plan ( $\pi'$ ) tangent à la sphère ( $S'_1$ ) et mené par  $By$ .

CONSEQUENCES. — La sphère ( $S_1$ ) enveloppe bien la sphère (O) et une autre sphère fixe ( $\Gamma_1$ ) transformée du plan ( $\pi'$ ) par  $i$ ; son centre  $S_1$  est situé sur l'ellipsoïde de révolution ( $E_1$ ), de foyers O,  $\Gamma_1$ , au-dessus de (P) et entièrement déterminé.

*Cas particulier.* — Pour la configuration d'ARCHIMÈDE,  $\theta = 0$ ; les rapports (12) ont pour valeur commune  $\sqrt{3}$ .

CONFIGURATION DE SPHÈRES. — Une analogie avec la configuration plane consiste à construire, de proche en proche, les sphères:  $(S_1)$ , tangente aux sphères  $(O)$ ,  $(O_1)$ ,  $(O_2)$ ,  $(\omega_1)$ ;  $(S_2)$ , tangente à  $(O)$ ,  $(O_1)$ ,  $(\omega_1)$ ,  $(S_1)$ ;  $(S_3)$ , tangente à  $(O)$ ,  $(O_1)$ ,  $(\omega_1)$ ,  $(S_2)$ , ...;  $(S_6)$ , tangente à  $(O)$ ,  $(O_1)$ ,  $(\omega_1)$ ,  $(S_5)$ . La chaîne formée par les sphères  $(S_n)$ , ( $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ), autour de la sphère  $(\omega_1)$ , est fermée. En effet, l'inversion  $i$  transforme les six sphères  $(S_n)$  en des sphères  $(S'_n)$  égales à  $(\omega'_1)$ , tangentes aux plans  $(\Delta)$ ,  $(\pi)$ , tangentes entre elles et dont les centres sont coplanaires. Les triangles  $S'_1 \omega'_1 S'_2$ , ...,  $S'_5 \omega'_1 S'_6$  étant équilatéraux, les points  $\omega'_1$  et  $S'_n$  coïncident respectivement avec le centre et les sommets d'un hexagone régulier (fig. 2). Lorsque  $C$  varie entre  $A$  et  $B$  sur  $AB$ , chacune des sphères  $(S_n)$  enveloppe la sphère  $(O)$  et une sphère  $(\Gamma_n)$ ; son centre  $S_n$  appartient à un ellipsoïde de révolution déterminé  $(E_n)$ , au-dessus ou au-dessous du plan  $(P)$ .

N.B. — Si  $\theta = 0$ , les sphères  $(O'_2)$  et  $(S'_6)$  sont confondues ainsi que  $(O_2)$  et  $(S_6)$ .

ERRATA (*L'Enseignement mathématique*, 1951-1954). — La première ligne de l'équation (2) doit s'écrire

$$[(a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta) R^2 - 2ab (a + b) R \cos^2 \theta + a^2 b^2 \cos^4 \theta] \rho_1^2 ;$$

p. 64, ligne 15, lire...  $(\omega_1, \omega_2)$  sont transformés l'un de l'autre par...; ligne 5 en remontant:  $OS_1: S_1 \omega_1$ ; p. 69, ligne 11, *entre* au lieu de *centre*.

Reçu le 4 décembre 1956.