

# HERMANN WEYL (1885-1955)

Autor(en): **Chevalley, C. / Weil, A.**

Objektyp: **Obituary**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

92 : Weyl H.

## HERMANN WEYL (1885-1955)

PAR

C. CHEVALLEY et A. WEIL

---

« Quand Hermann Weyl et Hella annoncèrent leurs fiançailles, l'étonnement fut général que ce jeune homme timide et peu loquace, étranger aux cliques qui faisaient la loi dans le monde mathématique de Göttingen, eût remporté le prix convoité par tant d'autres. Ce n'est que peu à peu que l'on comprit à quel point Hella avait eu raison dans son choix...<sup>1</sup> »

Peut-être les vérités mathématiques, comme les femmes, font-elles leur choix entre ceux qu'elles attirent. Est-ce le mieux doué qu'elles choisissent, ou le plus séduisant ? celui qui les désire le plus ardemment, ou celui qui les a le mieux méritées ? Elles semblent se tromper parfois ; souvent il faut du temps pour s'apercevoir qu'elles ont eu raison. Timide, peu loquace, étranger aux cliques, tel apparaissait donc Hermann Weyl à ses débuts ; tel il devait rester au fond de lui-même, en dépit des succès d'une brillante carrière. Comme beaucoup de timides une fois rompues les barrières de leur timidité, il était capable d'enthousiasme et d'éloquence : « Ce soir-là, dit-il en racontant sa première rencontre avec celle qu'il devait épouser<sup>2</sup>, je décrivis l'incendie d'une grange auquel je venais d'assister ; elle me dit plus tard qu'à m'écouter elle s'était éprise de moi aussitôt. » Ses propres confidences nous le montrent profondément influençable aussi, jusque dans sa pensée la plus intime : « Mon tranquille positivisme

---

<sup>1</sup> Extrait des paroles prononcées par Courant aux obsèques de Hella Weyl le 9 septembre 1948.

<sup>2</sup> Cette citation, comme plusieurs autres par la suite, est tirée d'une notice inédite consacrée par Hermann Weyl à la mémoire de Hella Weyl. Nos autres citations proviennent des publications de Weyl.

fut ébranlé quand je m'épris d'une jeune musicienne d'esprit très religieux, membre d'un groupe qui s'était formé autour d'un hégélien connu... Peu après, j'épousai une élève de Husserl; ainsi, ce fut Husserl qui, me dégageant du positivisme, m'ouvrit l'esprit à une conception plus libre du monde. » Il avait alors vingt-sept ans.

C'est ainsi qu'on voit se dessiner, vers l'époque de son mariage, quelques-uns des principaux traits d'une des personnalités mathématiques les plus marquantes et attachantes de la première moitié de ce siècle, mais aussi de l'une des plus difficiles à serrer de près. « A country lad of eighteen », un gars de campagne de dix-huit ans, ainsi se décrit-il lui-même à son arrivée à Göttingen. « J'avais choisi cette université, dit-il, principalement parce que le directeur de mon lycée était un cousin de Hilbert et m'avait donné pour celui-ci une lettre de recommandation. Mais il ne me fallut pas longtemps pour prendre la résolution de lire et étudier tout ce que cet homme avait écrit. Dès la fin de ma première année, j'emportai son *Zahlbericht* sous mon bras et passai les vacances à le lire d'un bout à l'autre, sans aucune notion préalable de théorie des nombres ni de théorie de Galois. Ce furent les mois les plus heureux de ma vie... <sup>3</sup> »

Un peu plus tard, ce sont les joies de la découverte: « Un nouvel événement fut décisif pour moi: je fis une découverte mathématique importante. Elle concernait la loi de répartition des fréquences propres d'un système continu, membrane, corps élastique ou éther électromagnétique. Le résultat, conjecturé depuis longtemps par les physiciens, semblait encore bien loin alors d'une démonstration mathématique. Tandis que j'étais fiévreusement occupé à mettre mon idée au point, ma lampe à pétrole avait commencé à fumer. Quand je terminai, une épaisse pluie de flocons noirs s'était abattue sur mon papier, sur mes mains, sur mon visage. » A ce moment, il est déjà privatdozent à Göttingen. Bientôt c'est le mariage, la chaire à Zurich, la

---

<sup>3</sup> « De toute mes expériences spirituelles, écrit-il ailleurs, celles qui m'ont comblé de la plus grande joie furent, en 1905, quand j'étais étudiant, l'étude du *Zahlbericht* et, en 1922, la lecture de maître Eckhart qui me retint fasciné pendant un splendide hiver en Engadine. »

guerre. Au bout d'un an de garnison à Sarrebruck (comme simple soldat, précise-t-il), le gouvernement suisse obtient qu'il soit rendu à son enseignement à l'École polytechnique fédérale. « Je ne puis guère me souvenir d'un instant de joie plus intense que le beau jour de printemps, en mai 1916, où Hella et moi franchîmes la frontière suisse, puis, arrivés chez nous, descendîmes de nouveau jusqu'au lac à travers la belle ville paisible. »

Il reprend ses travaux. Un cours professé à Zurich sur la relativité paraît en volume, en 1918; c'est le célèbre *Raum, Zeit, Materie*, qui connaît cinq éditions en cinq ans et, profitant de la vogue extraordinaire du sujet jusque parmi les profanes, répand le nom de Weyl bien au-delà du monde des mathématiciens où sa réputation n'était plus à faire. Les offres de chaires viennent d'un peu partout; celle de Göttingen en 1922, où il s'agissait de la succession de Klein, fut l'occasion pour lui d'un débat de conscience particulièrement difficile. Ayant retardé sa décision tant qu'il pouvait, ayant encore au dernier moment parcouru avec sa femme les rues de Zurich en pesant sa réponse, il partit enfin au bureau de poste pour télégraphier son acceptation. Arrivé devant le guichet, ce fut un refus qu'il télégraphia; il n'avait pu se résoudre à échanger sa tranquillité zurichoise contre les incertitudes de l'Allemagne d'après guerre. « L'étonnement de Hella, dit-il, fut sans bornes; les événements ne tardèrent pas à me donner raison. »

Mais en 1929, quand Göttingen lui offre la succession de Hilbert, il se laisse tenter. « Les trois années qui suivirent, dit-il, furent les plus pénibles que Hella et moi ayons connues. » C'est le nazisme, d'abord imperceptible nuage à l'horizon, qui grandit à vue d'œil, s'abat en trombe sur l'Allemagne en désarroi, y recouvre tout de boue sanglante. Par bonheur pour Hermann Weyl, l'Institute for Advanced Study de Princeton, nouvellement créé, offre de le sauver du désastre. Il hésite. Il accepte, il refuse. Il accepte de nouveau l'année suivante; c'est de Zurich qu'il envoie sa démission à Göttingen en 1933 et qu'il part pour l'Amérique.

Il n'eut donc pas à subir ce stage souvent long, parfois humiliant et pénible, que les circonstances ont imposé à beaucoup de savants réfugiés aux États-Unis. La chaire de l'Institute

lui assura d'emblée le confort matériel et la situation de premier plan dans le monde scientifique américain auxquels tout, certes, lui donnait droit. Ce furent, dit-il, des années heureuses que celles qu'il passa à Princeton. Sans doute ne s'accoutuma-t-il jamais à porter aisément ce qu'il appelle « le joug d'une langue étrangère ». Mais, grâce au respect et à l'affection qui l'entourèrent dès l'abord, il se sentait enfin chez lui; et on sent percer à nouveau le gars de campagne des premiers jours de Göttingen lorsqu'il dépeint le plaisir qu'il éprouva, en 1938, à posséder son lopin de terre et à y bâtir sa maison. Si la mort de sa femme, en 1948, le déchira cruellement, un second mariage, quelque temps après, lui fit retrouver son équilibre. Ayant pris sa retraite à l'Institute, il partagea désormais son temps entre Princeton et Zurich. Une attaque cardiaque l'emporta à l'improviste, peu après les fêtes de son soixante-dixième anniversaire.

A son arrivée en Amérique, il avait déjà donné en mathématique le meilleur de lui-même, et il le savait. Pour tout autre que lui, la tentation eût été grande de se reposer sur ses lauriers, de s'abandonner à un rôle de « pontife ». Combien n'en est-il pas dont toute l'activité, passé un certain âge, consiste à aller de commission en commission, pour y discuter gravement des mérites de travaux de « jeunes » qu'ils n'ont pas lus, qu'ils ne connaissent que par oui-dire ! Hermann Weyl se faisait une bien autre et bien plus haute idée de son métier de professeur. Il vit que Princeton seul, à notre époque, peut être ce qu'ont été autrefois Paris, puis Göttingen : un centre d'échanges, un « clearing-house » des idées mathématiques qui circulent de par le monde. Rappelant l'intense vie mathématique qui s'était développée autrefois à Göttingen sous l'influence dominante de Hilbert, il a écrit : « Les idées font boule de neige en un pareil point de condensation de la recherche » ; et il ajoute : « Nous avons assisté à quelque chose de semblable ici à Princeton pendant les premières années d'existence de l'Institute for Advanced Study. » S'il en a été ainsi, c'est en grande partie à lui qu'en revient le mérite. Il se donna pour tâche principale de se maintenir au courant de l'actualité, de renseigner et éclairer les chercheurs, de leur servir d'interprète, de comprendre mieux qu'eux ce qu'ils faisaient ou essayaient de faire ; il s'y consacra en toute

modestie, conscient de faire œuvre utile, conscient d'y être irremplaçable. Dans sa production, qui, pendant toute cette période, reste abondante et d'une extraordinaire variété, on retrouve la trace de ses lectures, des séminaires et discussions auxquels il prenait part, des problèmes sur lesquels de tous côtés on sollicitait ses avis. Parmi ces travaux, il n'en est guère qui n'éclaire un point difficile ou ne comble une lacune fâcheuse. Cette activité s'est poursuivie jusque dans ses dernières années. Par une suprême coquetterie peut-être, sa dernière publication aura été une édition rajeunie, complètement refondue, de son premier livre, livre toujours utile, encore actuel, auquel par cette révision il a donné une vitalité nouvelle. Qui de nous ne serait satisfait de voir sa carrière scientifique se terminer de même ?

\* \* \*

Un Protée, qui se transforme sans cesse pour se dérober aux prises de l'adversaire, et ne redevient lui-même qu'après le triomphe final: telle est l'impression que nous laisse souvent Hermann Weyl. N'est-il pas allé, poussé par le milieu sans doute, par l'occasion, mais aussi par « l'inquiétude de son génie », jusqu'à se muer en logicien, en physicien, en philosophe ? L'axiome *Ne sutor ultra crepidam* nous interdit de le suivre si loin en ses métamorphoses. Mais, dans son œuvre mathématique même, il n'est que trop fréquent qu'il vous glisse entre les mains lorsqu'on croit le mieux le saisir; et il faut avouer que la tâche de ses lecteurs n'en est pas facilitée. Il est vrai qu'il appartient à une période de transition dans l'histoire des mathématiques et qu'il s'en est trouvé profondément marqué. Souvent il a pu prendre un plaisir grisant à se laisser entraîner ou ballotter par les courants opposés qui ont agité cette époque, sûr d'ailleurs au fond de lui-même (comme lorsqu'il s'abandonna un moment à l'intuitionnisme brouwérien) que son bon sens foncier le garantirait du naufrage. Son œuvre a grandement contribué à ce changement de vision qui a fait passer de la mathématique classique, fondée sur le nombre réel, à la mathématique moderne, fondée sur la notion de structure. L'emploi systématique et tout abstrait du revêtement universel, la notion de variété analytique

complexe, l'emploi courant et la popularisation, jusque parmi les physiciens, de l'algèbre vectorielle et du concept d'espace de représentation d'un groupe, tout cela vient avant tout de lui. Mais, s'il était trop élève de Hilbert pour ne pas inclure parmi ses outils la méthode axiomatique, s'il était trop mathématicien aussi pour en dédaigner les succès (son chaleureux éloge de l'œuvre d'Emmy Noether serait là, si besoin était, pour en faire foi), ce n'était pas à elle qu'allaient ses sympathies. Il y voyait « le filet dans lequel nous nous efforçons d'attraper la simple, la grande, la divine Idée »; mais, dans ce filet, il semble avoir toujours craint que l'on n'attrapât que des cadavres. A la dissection impitoyable sous le jour cru des projecteurs, il préférait, en bon romantique, le jeu troublant des analogies, auquel se prête si bien le langage de la métaphysique allemande qu'il affectionnait. Plutôt que de saisir l'idée brutalement au risque de la meurtrir, il aimait bien mieux la guetter dans la pénombre, l'accompagner dans ses évolutions, la décrire sous ses multiples aspects, dans sa vivante complexité. Était-ce de sa faute si ses lecteurs, moins agiles que lui, éprouvaient parfois quelque peine à le suivre ?

\* \* \*

« Le véritable principe de Dirichlet, a dit Minkowski dans un passage que Weyl citait volontiers, ce fut d'attaquer les problèmes au moyen d'un minimum de calcul aveugle, d'un maximum de réflexion lucide. » Et Weyl a écrit de son maître Hilbert : « Un trait caractéristique de son œuvre, c'est sa méthode d'attaque directe; s'affranchissant de tout algorithme, il revient toujours au problème tel qu'il se présente dans sa pureté originelle. » En deux ou trois occasions, il a atteint pleinement lui-même à cet idéal de perfection classique, par exemple dans son travail de 1916 sur l'égalité répartition modulo 1, et encore dans ses mémoires jumeaux sur les fonctions presque périodiques et sur les représentations des groupes compacts. Comme il est naturel, ce sont là, parmi ses travaux, ceux qu'on relit avec le plus de plaisir, ceux dont il est le plus facile aussi de rendre compte. Aussi est-ce par eux que nous commencerons, renonçant à un ordre logique impossible à suivre lorsqu'il s'agit d'analyser

une œuvre aussi riche. L'origine du premier, nous dit-il, se trouve dans un travail sur le phénomène de Gibbs, où s'était présentée incidemment une question d'approximation diophantienne; il s'était agi de faire voir que tout nombre irrationnel  $\alpha$  peut être approché par une suite de fractions  $p_n/q_n$  satisfaisant aux conditions  $q_n = o(n)$ ,  $|\alpha - p_n/q_n| = o(1/n)$ . Un peu plus tard l'attention de Weyl fut attirée par F. Bernstein sur le problème du mouvement moyen en mécanique céleste, problème qui remontait à Lagrange, et dont Bohl s'occupait alors; il s'agit là de déterminer le comportement asymptotique, pour  $t \rightarrow \infty$ , de l'argument d'une somme finie d'exponentielles  $\sum a_\nu e(\lambda_\nu t)$ , les  $\lambda_\nu$  étant réels<sup>4</sup>. Ce fut l'occasion pour lui d'observer d'abord que son lemme diophantien entraînait aisément l'égalité répartition modulo 1 de la suite  $(n\alpha)$  pour  $\alpha$  irrationnel, résultat qui fut obtenu en même temps par Bohl et par Sierpinski. Mais Weyl, à l'école de Hilbert et surtout par ses propres recherches sur les valeurs et fonctions propres, avait acquis un sens trop juste de l'analyse harmonique pour s'en tenir là.

Convenons de désigner par  $M(x_n)$ , pour toute suite  $(x_n)$ , la limite pour  $n \rightarrow \infty$ , si elle existe, de la moyenne des nombres  $x_1, \dots, x_n$ . Dire que la suite  $(\alpha_n)$  est également répartie modulo 1 équivaut à dire qu'on a  $M[f(\alpha_n)] = \int_0^1 f(x) dx$  pour certaines fonctions périodiques particulières, à savoir pour les fonctions de période 1 qui coïncident dans l'intervalle  $[0, 1]$  avec une fonction caractéristique d'intervalle. Weyl s'aperçut que, si cette propriété est vérifiée pour les fonctions en question, elle l'est nécessairement aussi pour toute fonction périodique de période 1, intégrable au sens de Riemann, et en particulier pour les caractères  $e(nx)$  du groupe additif des réels modulo 1; réciproquement, si elle l'est pour ces dernières fonctions, elle l'est aussi, en vertu des théorèmes classiques sur la série de Fourier, pour toute fonction périodique intégrable au sens de Riemann, de sorte que la suite  $(\alpha_n)$  est également répartie modulo 1; la démonstration de ces assertions est immédiate. Le résultat sur l'égalité répartition modulo 1 de la suite  $(n\alpha)$  pour  $\alpha$  irrationnel

<sup>4</sup> Ici, comme dans tout ce qui suit, on pose  $e(t) = e^{2\pi it}$ .



découle de là aussitôt, sans aucun lemme diophantien; en remplaçant le groupe des réels modulo 1 par un tore de dimension quelconque, on obtient de même, et sans calcul, la forme quantitative des célèbres théorèmes d'approximation de Kronecker. Tout cela, si neuf à l'époque du travail de Weyl, nous paraît à présent bien simple, presque trivial. Mais aujourd'hui encore le lecteur reste étonné de voir comme Weyl, sans reprendre haleine, passe de là à l'égalité répartition d'une suite  $(P(n))$ , où  $P$  est un polynôme quelconque. Cela revient naturellement, d'après ce qui précède, à l'évaluation des sommes d'exponentielles  $\sum e(P(n))$ , problème qui avait été déjà l'objet des recherches de Hardy et Littlewood. Plus précisément, il s'agit de démontrer la relation

$$\sum_{n=0}^N e(P(n)) = o(N)$$

lorsque  $P$  est un polynôme où le coefficient du terme de plus haut degré est irrationnel. Pour donner une idée de la méthode de Weyl, qui (avec les perfectionnements qu'y ont apportés Vinogradov et son école) est restée fondamentale en théorie analytique des nombres, considérons le cas où  $P$  est du second degré. Posons donc:

$$s_N = \sum_{n=0}^N e(\alpha n^2 + \beta n),$$

$\alpha$  étant irrationnel. On écrira alors, comme dans l'évaluation classique des sommes de Gauss:

$$\begin{aligned} |s_N|^2 &= s_N \bar{s}_N = \sum_{m,n=0}^N e(\alpha(m^2 - n^2) + \beta(m - n)) \\ &= \sum_{r=-N}^{+N} e(\alpha r^2 + \beta r) \sum_{n \in I_r} e(2\alpha rn), \end{aligned}$$

où on a substitué  $n + r$  à  $m$ , et où  $I_r$  désigne l'intersection des deux intervalles  $[0, N]$  et  $[-r, N - r]$ . Si on désigne par  $\sigma_r$  la dernière somme (celle qui est étendue à l'intervalle  $I_r$ ), on a donc  $|s_r|^2 \leq \sum |\sigma_r|$ . Comme  $\sigma_r$  est une somme de  $N + 1$  termes

au plus, on a  $|\sigma_r| \leq N + 1$  quel que soit  $r$ ; comme d'autre part  $\sigma_r$  est somme d'une progression géométrique de raison  $e(2\alpha r)$ , on a aussi:

$$|\sigma_r| \leq |\sin(2\pi\alpha r)|^{-1}.$$

Soit  $0 \leq \varepsilon < 1/2$ ; en vertu de l'égalité répartition des nombres  $2\alpha r$  modulo 1, le nombre des entiers  $r$  de l'intervalle  $[-N, +N]$  qui sont tels que  $2\alpha r$  soit congru modulo 1 à un nombre de l'intervalle  $[-\varepsilon, +\varepsilon]$  est de la forme  $4\varepsilon N + o(N)$ , et est donc  $\leq 5\varepsilon N$  dès que  $N$  est assez grand. Pour chacun de ces entiers, on a  $|\sigma_r| \leq N + 1$ ; pour tous les autres, on a  $|\sigma_r| \leq 1/\sin(\pi\varepsilon)$ . On a donc, pour  $N$  assez grand:

$$|s_N|^2 \leq 5\varepsilon N(N + 1) + \frac{2N + 1}{\sin(\pi\varepsilon)}.$$

Pour  $N$  assez grand, le second membre sera  $\leq 6\varepsilon N^2$ ; comme il en est ainsi quel que soit  $\varepsilon$ , on a bien  $s_N = o(N)$ . Si le degré du polynôme  $P$  est  $d + 1$  avec  $d > 1$ , la démonstration se fait de même (et non par récurrence sur  $d$ ) au moyen d'un lemme sur l'égalité répartition modulo 1 d'une fonction multilinéaire de  $d$  variables. Le résultat s'étend aux fonctions de  $p$  variables par récurrence sur  $p$ .

Avec cet admirable mémoire, Weyl était déjà très près des fonctions presque périodiques. Il s'y agissait, en effet, en premier lieu, des sous-groupes cycliques et des sous-groupes à un paramètre d'un tore de dimension finie, tandis que la théorie des fonctions presque périodiques traite, dirions-nous, des sous-groupes à un paramètre d'un tore de dimension infinie. On peut même dire que cette théorie, qui suscita tant d'intérêt pendant une dizaine d'années à la suite des publications de H. Bohr en 1924, eut pour principale utilité de ménager la transition entre le point de vue classique et le point de vue moderne au sujet des groupes compacts et localement compacts. Au temps même où Weyl s'occupait à Göttingen d'égalité répartition modulo 1, vers 1913, les premières idées sur les fonctions presque périodiques y étaient « dans l'air ». Le problème du mouvement moyen portait sur les sommes d'exponentielles, finies il est vrai, et Weyl en

avait traité des cas particuliers, sans d'ailleurs approfondir la question, qu'il ne devait résoudre complètement, toujours par la même méthode, que lorsqu'il s'y trouva ramené vingt-cinq ans plus tard. Mais H. Bohr, alors élève de Landau, s'occupait de séries d'exponentielles en vue de l'étude de  $\zeta(s)$  dans le  $p$ -an complexe, problème auquel Weyl va bientôt s'intéresser en passant, déterminant même par sa méthode le comportement asymptotique de  $\zeta(1 + it)$ . D'autre part, les élèves de Hilbert étaient accoutumés à considérer les termes de la série de Fourier comme fonctions propres, et les coefficients de cette série comme valeurs propres, d'opérateurs convenablement définis. Il semble donc que les voies fussent toutes préparées dans l'esprit de Weyl, lorsque apparurent les premiers travaux de H. Bohr sur les fonctions presque périodiques, pour reprendre la question du point de vue des équations intégrales.

Mais il est rare qu'un mathématicien, qu'il s'agisse du plus grand ou du plus humble, parcoure le plus court chemin d'un point à un autre de sa trajectoire. Avant de revenir aux fonctions presque périodiques à l'occasion d'une conférence de H. Bohr à Zurich, Weyl avait mené à bien ses mémorables recherches sur les groupes de Lie et leurs représentations, et avait conçu l'idée, d'une audace extraordinaire pour l'époque, de « construire » les représentations des groupes de Lie compacts par la complète décomposition d'une représentation de degré infini. Blasés que nous sommes par l'expérience des trente dernières années, cette idée ne nous étonne plus; mais son succès semble avoir fait l'effet d'un vrai miracle à son auteur; « c'est là, répète-t-il à maintes reprises, l'une des plus surprenantes applications de la méthode des équations intégrales ». Déjà I. Schur avait étendu au groupe orthogonal, au moyen de l'élément de volume invariant dans l'espace de groupe, les relations d'orthogonalité entre coefficients des représentations que Frobenius avait découvertes pour les groupes finis; mais il y avait loin de là à un théorème d'existence. Weyl n'hésite pas à introduire, sur un groupe de Lie compact, l'algèbre de groupe, toujours conçue chez lui comme algèbre des fonctions continues par rapport au produit de convolution

$$h = f \star g, \quad h(s) = \int f(st^{-1}) g(t) dt,$$

et dont il fait un espace préhilbertien au moyen de la norme  $(\int |f|^2 ds)^{1/2}$ ; les intégrales, naturellement, sont prises au moyen de l'élément de volume invariant que fournit la théorie de Lie, et que Hurwitz avait sans doute été le premier à utiliser systématiquement. Dans cet espace, l'opérateur  $f \rightarrow \varphi * \tilde{\varphi} * f$ , où  $\tilde{\varphi}$  désigne la fonction  $\tilde{\varphi}(s) = \varphi(s^{-1})$ , est hermitien et complètement continu; d'après la théorie de E. Schmidt, ses valeurs propres forment donc un spectre discret, et à chacune correspond un espace de fonctions propres de dimension finie, dont on constate immédiatement qu'il est invariant par le groupe; c'est donc un espace de représentation de celui-ci. Les théorèmes de Schmidt fournissent alors le développement de  $\varphi$  suivant les coefficients des représentations ainsi obtenues, développement qui converge au sens de la norme. C'est là une généralisation directe de la méthode de Frobenius basée sur la réduction de la représentation régulière d'un groupe fini; la seule différence, comme l'observe Weyl, c'est l'absence d'un élément unité dans l'algèbre d'un groupe compact; Weyl y supplée par un artifice tiré de la théorie des séries de Fourier, à savoir l'approximation de la masse unité placée à l'origine par une distribution de masses à densité continue, concentrée dans un voisinage de l'origine; la convolution avec celle-ci constitue un « opérateur régularisant », d'emploi courant aujourd'hui, mais dont c'était sans doute la première apparition dans le cadre de la théorie des groupes de Lie; Weyl s'en sert pour démontrer que toute fonction continue peut être approchée, non seulement au sens de la norme, mais même uniformément, par des combinaisons linéaires de coefficients de représentations.

Bien que le mémoire de Weyl se limitât nécessairement aux groupes de Lie, il avait atteint en réalité, du premier coup, à des résultats définitifs sur les représentations des groupes compacts; après la découverte de la mesure de Haar, il n'y eut pas un mot à changer à son exposé, et, chose rare en mathématique, il ne vint même à personne l'idée de le récrire. Si, comme nous le faisons aujourd'hui, on considère une fonction presque périodique comme déterminant une représentation du groupe additif des réels dans un groupe compact, et qu'on suppose acquise pour celui-ci la notion de mesure de Haar, on déduit

immédiatement des résultats de Weyl exposés ci-dessus le développement de la fonction en série d'exponentielles. Les outils manquaient à Weyl, en 1926, pour adopter ce point de vue; il y supplée en remplaçant l'intégrale par une moyenne sur la droite, définie comme limite pour  $T \rightarrow +\infty$  de la valeur moyenne sur l'intervalle  $[t, t + T]$  lorsque cette limite est atteinte uniformément par rapport au paramètre  $t$ . En 1926, il n'allait pas de soi que la théorie des équations intégrales s'appliquât à cette moyenne; Weyl est obligé de consacrer une bonne partie de son travail à justifier cette application. Il convient d'observer d'autre part que, sur un groupe compact, la manière la plus simple de construire la mesure de Haar consiste justement à attacher à chaque fonction continue une valeur moyenne, par un procédé directement inspiré de la théorie des fonctions presque périodiques. Que Weyl, en revanche, ait cru voir dans la théorie de Bohr « le premier exemple d'une théorie des représentations d'un groupe vraiment non compact » (par opposition apparemment avec les groupes de Lie semi-simples dont les représentations, dans son esprit, se ramenaient, par la « restriction unitaire », à celles de groupes compacts), cela montre qu'il se faisait encore quelque illusion sur le degré de difficulté des problèmes qui restaient à résoudre. Ce n'en est pas moins lui qui a ouvert la voie à tous les progrès ultérieurs dans cette direction.

\* \* \*

Sur le reste de son œuvre d'analyste, nous serons beaucoup plus brefs, d'autant plus qu'il a lui-même excellemment rendu compte d'une bonne partie de cette œuvre dans sa *Gibbs Lecture* de 1948. Débutant, il participa activement au courant de recherches qui se proposait d'approfondir et d'appliquer à des problèmes variés d'analyse la théorie spectrale des opérateurs symétriques. Citons particulièrement, dans cet ordre d'idées, sa *Habilitationsschrift* de 1910, où il étudie un opérateur différentiel autoadjoint  $L$  sur la demi-droite  $[0, +\infty[$ :

$$L(u) = \frac{d}{dt} \left( p(t) \frac{du}{dt} \right) - q(t) u ,$$

où  $p, q$  sont à valeurs réelles et  $p(t) > 0$ . Sur tout intervalle fini  $[0, l]$ , cet opérateur, soumis aux conditions aux limites du type habituel,  $(du/dt)_0 = hu(0)$ ,  $(du/dt)_l = h'u(l)$ , relève de la théorie de Sturm-Liouville ou, en termes modernes, de la théorie des opérateurs complètement continus; le spectre est réel et discret et se compose des  $\lambda$  pour lesquels l'équation  $Lu = \lambda u$  a une solution satisfaisant aux conditions aux limites imposées. Le passage à la limite  $l \rightarrow +\infty$  fait apparaître, non seulement un spectre continu qui peut couvrir tout l'axe réel, mais encore des phénomènes imprévus dont la découverte est due à Weyl. Les plus intéressants concernent le comportement des solutions pour  $l \rightarrow +\infty$  lorsqu'on donne à  $\lambda$  une valeur imaginaire fixe; chose remarquable, ils sont indépendants du choix de la valeur donnée à  $\lambda$ . C'est ainsi que Weyl est amené en particulier à la distinction fondamentale entre le cas du « point limite » et le cas du « cercle limite »: l'une des propriétés caractéristiques du premier, c'est que l'équation  $Lu = \lambda u$  y possède, quel que soit  $\lambda$  imaginaire, une solution et une seule de carré sommable sur  $[0, +\infty]$ , tandis que toutes ses solutions le sont, pour  $\lambda$  imaginaire, dans le cas du cercle limite. Weyl étudie aussi le passage à la limite  $l \rightarrow +\infty$  pour les développements de Sturm-Liouville sur  $[0, l]$ ; il en tire des formules intégrales où apparaissent en général des intégrales de Stieltjes, comme on pouvait s'y attendre. Le problème des moments de Stieltjes n'est d'ailleurs pas autre chose que le problème aux différences finies, analogue à l'équation  $Lu = \lambda u$  sur la demi-droite, et Hellinger fit voir par la suite que la méthode de Weyl s'y transporte presque telle quelle. Mais Weyl put aussi la transposer plus tard à un problème différentiel où le paramètre spectral intervient non linéairement, ainsi qu'au problème aux différences finies correspondant (auquel il a donné le nom de problème de Pick-Nevanlinna); il apporta même à cette occasion quelques améliorations notables à son premier exposé. Si celui-ci a donné lieu depuis lors à des généralisations assez variées, il ne semble pas que la signification véritable des résultats de Weyl sur les problèmes à paramètre non linéaire ait jamais été tirée au clair.

Une autre série de travaux traite de la répartition des valeurs propres, dans divers problèmes de type elliptique. Ils

reposit principalement sur un principe qui plus tard fut popularisé par Courant sous la forme suivante: si  $A$  est un opérateur symétrique complètement continu dans un espace de Hilbert  $H$ , sa  $n$ -ième valeur propre est la plus petite des valeurs (« minimum maximorum ») que peut prendre la norme de  $A$ , c'est-à-dire le nombre  $\max (Ax, x)/(x, x)$ , sur un sous-espace de  $H$  de codimension  $n - 1$ . Une fois acquise la théorie des opérateurs complètement continus, la vérification de ce principe est d'ailleurs immédiate. Mais Weyl l'adapte en virtuose à toutes sortes de situations de physique mathématique. Quant au comportement asymptotique des fonctions propres, il avait, nous dit-il en 1948, certaines conjectures: « mais, n'ayant fait pendant plus de trente-cinq ans aucune tentative sérieuse pour les démontrer, je préfère, ajoute-t-il, les garder pour moi »; il aura donc laissé ce problème plus difficile en héritage à ses successeurs.

\* \* \*

C'est en élève de Hilbert encore, et en analyste, que Weyl dut aborder le sujet d'un des premiers cours qu'il professa à Göttingen comme jeune privatdozent, la théorie des fonctions selon Riemann. Le cours terminé et rédigé, il se retrouva géomètre, et auteur d'un livre qui devait exercer une profonde influence sur la pensée mathématique de son siècle. Peut-être s'était-il proposé seulement de remettre au goût du jour, en faisant usage des idées de Hilbert sur le principe de Dirichlet, les exposés traditionnels dont l'ouvrage classique de C. Neumann fournissait le modèle. Mais il dut lui apparaître bientôt que, pour substituer aux constants appels à l'intuition de ses prédécesseurs des raisonnements corrects et, comme on disait alors, « rigoureux » (et dans l'entourage de Hilbert on n'admettait pas qu'on trichât là-dessus), c'étaient avant tout les fondements topologiques qu'il fallait renouveler. Weyl n'y semblait guère préparé par ses travaux antérieurs. Il pouvait, dans cette tâche, s'appuyer sur l'œuvre de Poincaré, mais il en parle à peine. Il mentionne, comme l'ayant profondément influencé, les recherches de Brouwer, alors dans leur première nouveauté; en réalité, il n'en fait aucun usage. De fréquents contacts avec Koebe, qui dès lors

s'était consacré tout entier à l'uniformisation des fonctions d'une variable complexe, durent lui être d'une grande utilité, particulièrement dans la mise au point de ses propres idées. La première édition du livre est dédiée à Félix Klein, qui bien entendu, comme Weyl le dit dans sa préface, ne pouvait manquer de s'intéresser à un travail si voisin des préoccupations de sa jeunesse ni de donner à l'auteur des conseils inspirés de son tempérament intuitif et de sa profonde connaissance de l'œuvre de Riemann. Bien qu'il n'eût jamais connu celui-ci, c'était Klein qui, à Göttingen, incarnait la tradition riemannienne. Enfin, dans l'un de ses mémoires sur les fondements de la géométrie, Hilbert avait formulé un système d'axiomes fondé sur la notion de voisinage, en soulignant qu'on trouverait là le meilleur point de départ pour « un traitement axiomatique rigoureux de l'analysis situs ». De tous ces éléments si divers que lui fournissaient la tradition et le milieu, Weyl tira un livre profondément original et qui devait faire époque.

Le livre est divisé en deux chapitres, dont le premier contient la partie qualitative de la théorie. Les notions de « surface » (variété topologique de dimension 2 à base dénombrable) et de « surface de Riemann » (variété analytique complexe à base dénombrable, de dimension complexe 1) y sont définies au moyen de systèmes d'axiomes, inspirés naturellement de celui de Hilbert, mais qui cette fois (sauf une légère omission dans la première édition) étaient destinés à subsister sans retouches, et devaient servir de modèle à Hausdorff pour son axiomatisation de la topologie générale. Dans la première et la deuxième édition, la condition de base dénombrable apparaît sous forme de condition de triangulabilité; et la triangulation joue un grand rôle dans la suite du volume; elle devait être éliminée entièrement de la troisième édition. Les questions touchant au groupe fondamental, au revêtement universel, à l'orientation, sont élucidées avec soin dans un esprit tout moderne, ainsi que les rapports entre propriétés homologiques et périodes des intégrales simples sur la surface. Dans la première et la deuxième édition, l'auteur va jusqu'à la construction, pour les surfaces orientables compactes, d'un système de « rétrosections », c'est-à-dire essentiellement d'une base privilégiée pour le premier groupe d'homologie;



comme il le dit lui-même, il aurait pu, au prix d'un léger effort supplémentaire, aller jusqu'à la représentation de la surface au moyen d'un « polygone canonique » à  $4g$  côtés ( $g$  désignant le genre), et à la détermination explicite du groupe fondamental, et on peut regretter qu'il ne l'ait pas fait. Mais la construction même des rétrosections, nécessairement basée sur la triangulation, disparaît dans la troisième édition, au profit d'un traitement plus purement homologique où n'interviennent que des recouvrements. En tout cas, pour tout l'essentiel, ce chapitre constitue une mise au point à peu près définitive des questions qu'il traite.

Les théorèmes d'existence font l'objet du deuxième chapitre. Weyl y donne du principe de Dirichlet une démonstration simplifiée, basée naturellement sur l'idée de Hilbert qui consiste, comme on sait, à opérer dans l'espace préhilbertien des fonctions différentiables avec la norme de Dirichlet; même dans la troisième édition, il n'a pas cru devoir suivre la variante qu'il avait pourtant contribué à créer lui-même, et qui consiste à opérer par projection orthogonale dans le complété de l'espace en question, puis à montrer après coup que la solution obtenue est différentiable. Une fois acquis le principe de Dirichlet, l'auteur en tire les principales propriétés des intégrales abéliennes et des fonctions multiplicatives, le théorème de Riemann-Roch, puis le théorème de l'uniformisation, c'est-à-dire la représentation conforme du revêtement universel de la surface de Riemann sur une sphère, un plan ou un disque. Si on laisse de côté les cas de genre 0 ou 1, le résultat peut s'exprimer en disant que toute surface de Riemann compacte, de genre  $> 1$ , peut se définir comme quotient du plan non-euclidien par un groupe discret de déplacements sans point fixe. « Ainsi, dit Weyl dans la préface de la première édition, ainsi nous pénétrons dans le temple où la divinité est rendue à elle-même, délivrée de ses incarnations terrestres: le *crystal non euclidien*, où l'archétype de la surface de Riemann se laisse voir dans sa pureté première... » C'est en songeant sans doute à ce passage que Weyl dit plus tard de sa préface que « plus encore que le livre lui-même, elle trahissait la jeunesse de son auteur ». Nous dirions aujourd'hui qu'on a construit pour la surface de Riemann un modèle qui est cano-

nique à un déplacement près dans le plan non euclidien; autrement dit, on a associé canoniquement une structure à une autre. Mais qui saurait mauvais gré à Weyl, après avoir achevé un livre de cette valeur, d'avoir exprimé d'une manière peut-être un peu trop romantique son enthousiasme juvénile ?

\* \* \*

C'est en 1916, pendant la guerre, que Weyl fit paraître en Suisse son premier mémoire de géométrie, sur le célèbre problème de la rigidité des surfaces convexes. Ici encore, Göttingen lui avait fourni son point de départ. Sous la direction de Hilbert, Weyl avait collaboré à la publication des œuvres complètes de Minkowski, où la théorie des corps convexes tient tant de place. D'autre part, Hilbert avait montré comment on peut faire dépendre les inégalités de Brunn-Minkowski de la théorie des opérateurs différentiels elliptiques. L'espace  $R^3$  étant considéré comme espace euclidien, et  $\langle x, y \rangle$  désignant le produit scalaire dans  $R^3$ , soit  $V$  un corps convexe dans cet espace, défini au moyen de la fonction d'appui  $H$ ; cela veut dire que  $H$  satisfait aux conditions

$$H(x + x') \leq H(x) + H(x'), \quad H(\lambda x) = \lambda H(x) \quad \text{pour } \lambda \geq 0,$$

et que  $V$  est l'ensemble des points  $y$  satisfaisant à  $\langle x, y \rangle \leq H(x)$  quel que soit  $x$ . Si on suppose  $H$  différentiable en dehors de  $0$ , le volume de  $V$  est alors donné par une formule

$$\text{vol}(V) = \int H \cdot Q(H) d\omega,$$

où l'intégrale est étendue à la sphère unité  $S_0$  définie par  $\langle x, x \rangle = 1$ , où  $d\omega$  désigne l'élément d'aire sur  $S_0$ , et où  $Q(H)$  est une forme quadratique par rapport aux dérivées partielles secondes de  $H$ . Soient  $F, F'$  deux fonctions, différentiables en dehors de  $0$ , satisfaisant toutes deux à la condition d'homogénéité  $F(\lambda x) = \lambda F(x)$  pour  $\lambda \geq 0$ ; soit  $B(F, F')$  la forme bilinéaire symétrique par rapport aux dérivées partielles secondes de  $F$  et à celles de  $F'$  qui se déduit de la forme quadratique  $Q(H)$  par linéarisation, c'est-à-dire qui est telle que  $Q(H) = B(H, H)$ ;

posons aussi  $L_F(F') = B(F, F')$ . On vérifie facilement, au moyen de la formule de Stokes, que l'intégrale

$$I(F, F', F'') = \int_{S_0} F'' \cdot B(F, F') d\omega,$$

où  $F''$  désigne une troisième fonction satisfaisant aux mêmes conditions que  $F$  et  $F'$ , dépend symétriquement de  $F$ ,  $F'$  et  $F''$ . Cela revient à dire que  $L_F$ , considéré comme opérateur différentiel sur les fonctions sur  $S_0$  prolongées à  $\mathbb{R}^3$  par homogénéité, est un opérateur autoadjoint. Si  $V, V', V''$  sont deux corps convexes définis par des fonctions d'appui  $H, H', H''$ , les formules ci-dessus montrent que les « volumes mixtes » associés par Minkowski à  $V, V', V''$  ne sont autres que les nombres  $I(H, H, H')$  et  $I(H, H', H'')$ ; de plus, un calcul simple montre que  $L_H$  est elliptique. Dans ces conditions, comme le fait voir Hilbert dans ses *Grundzüge*, l'application à  $L_H$  de la théorie des opérateurs autoadjoints elliptiques conduit, pour le cas différentiable, à l'inégalité de Brunn-Minkowski. Mais il se trouve que  $L_H$  n'est autre qu'un opérateur qui se présente dans la théorie de la déformation infinitésimale de la surface  $\Sigma$  frontière de  $V$ ; jointe aux résultats de Hilbert, cette observation, due à Blaschke, entraînait l'impossibilité d'une telle déformation pour  $\Sigma$ . Enfin, Hilbert, à propos des fondements de la géométrie, avait démontré l'impossibilité d'appliquer isométriquement une sphère sur une surface convexe non sphérique. D'ailleurs, des résultats analogues sur les polyèdres convexes avaient été obtenus jadis par Cauchy: non seulement un polyèdre convexe n'admet aucune déformation infinitésimale, mais encore, si  $P$  et  $P'$  sont deux polyèdres convexes admettant même schéma combinatoire et ayant leurs côtés correspondants égaux, ils ne peuvent différer l'un de l'autre que par un déplacement ou une symétrie. Tout cela mettait à l'ordre du jour l'extension aux surfaces convexes du second théorème de Cauchy.

Mais Weyl ne s'arrête pas là. Il considère en même temps un problème d'existence que, faute d'une conception claire de la notion de variété riemannienne abstraite, personne n'avait encore même formulé. Il s'agit de savoir si « toute surface

convexe fermée, donnée *in abstracto*, est réalisable » ou, comme nous dirions maintenant, si toute variété riemannienne compacte, simplement connexe, de dimension 2, à courbure partout positive, admet un plongement isométrique dans l'espace euclidien  $R^3$ ; la question d'unicité, pour ce problème d'existence, est alors celle même dont Weyl était parti. Interrompu dans son travail par sa mobilisation en 1915, il se contenta d'esquisser son idée de démonstration, et ne la mena jamais à terme. Il part du fait que toute « surface convexe *in abstracto* » peut être représentée conformément sur la sphère  $S_0$ , donc définie par un  $ds^2$  donné sur  $S_0$  sous la forme  $ds^2 = e^{2\Phi} d\sigma^2$ , où  $d\sigma$  est la longueur d'arc « naturelle » et  $\Phi$  une fonction différentiable sur  $S_0$ ; soit  $\Sigma(\Phi)$  la « surface abstraite » ainsi définie. La condition que  $\Sigma(\Phi)$  soit à courbure partout positive s'exprime par une inégalité différentielle  $K(\Phi) > 0$ ; on constate aussitôt que l'ensemble des  $\Phi$  qui y satisfont est convexe; il s'ensuit que l'ensemble des surfaces convexes abstraites est connexe. L'idée de Weyl est alors d'appliquer au problème une méthode de continuité. Tout revient,  $I$  désignant l'intervalle  $[0, 1]$ , à déterminer une application  $\varphi$  de  $S_0 \times I$  dans  $R^3$  de telle sorte que l'application  $x \rightarrow \varphi_\tau(x) = \varphi(x, \tau)$  de  $S_0$  dans  $R^3$  applique isométriquement  $\Sigma(\tau\Phi)$  sur une surface convexe  $S_\tau = \varphi_\tau(S_0)$ , et cela pour tout  $\tau \in I$ . Pour cela, Weyl considère  $\partial\varphi/\partial\tau$  comme une déformation infinitésimale de  $S_\tau$ , dont la détermination se ramène à la solution d'une équation  $\Lambda u = f$ , où  $f$  est une fonction sur  $S_0$ , dépendant de  $S_\tau$ , et  $\Lambda$  est essentiellement l'opérateur elliptique  $L_H$  relatif à  $S_\tau$ . L'application de la méthode de Hilbert à cette équation donne donc, en principe, une équation différentielle fonctionnelle pour  $\varphi_\tau$ ; il s'agit d'en trouver une solution sur l'intervalle  $I$  qui se réduise pour  $\tau = 0$  à l'application identique de  $S_0$  dans  $R^3$ ; et on peut espérer y parvenir au moyen de l'une quelconque des méthodes classiques de résolution des équations différentielles. Une démonstration complète a été obtenue récemment par Nirenberg en suivant cette voie; les brèves indications données ici suffiront tout au moins à faire apparaître l'extrême hardiesse de l'idée de Hermann Weyl.

Rentré à Zurich en 1916, Weyl eut, semble-t-il, quelque velléité de revenir aux surfaces convexes; un mémoire où il reprend les résultats de Cauchy sur les polyèdres présageait peut-être un mode d'attaque basé sur des méthodes moins infinitésimales et plus directes. Mais c'est bientôt la relativité qui attire et accapare son attention.

Là encore, il était dans la tradition. Minkowski avait participé activement au courant de recherches qui s'était développé autour de la relativité restreinte. Hilbert suivait de près les travaux d'Einstein et cherchait, sans grand succès d'ailleurs, à éclaircir les problèmes de la physique par la méthode axiomatique. « Il faut en physique un autre type d'imagination que celle du mathématicien », constate plus tard Hermann Weyl, non sans quelque mélancolie, dans sa notice sur Hilbert. Sans doute, en écrivant ces mots, songeait-il aussi à sa propre expérience et à cette « théorie de Weyl » à laquelle, disait-il vers la même époque, il ne croyait plus depuis longtemps. Mais à partir de 1917, et pendant plusieurs années, son enthousiasme est débordant. En 1918, il publie son cours de l'année précédente sur la relativité sous le titre *Raum, Zeit, Materie*. « A l'occasion de ce grand sujet, écrit-il dans la préface de la première édition, j'ai voulu donner un exemple de cette interpénétration, qui me tient tant à cœur, de la pensée philosophique, de la pensée mathématique, de la pensée physique... »; mais, ajoute-t-il avec une modestie non exempte de naïveté, « le mathématicien en moi a pris le pas sur le philosophe »; et ce ne sont pas les mathématiciens qui s'en plaindront. Son ouvrage, dans ses cinq éditions successives, fit beaucoup pour répandre parmi les mathématiciens et les physiciens les connaissances géométriques et les notions essentielles de l'algèbre et de l'analyse tensorielles. A partir de la troisième édition, on y trouve aussi un exposé de la « théorie de Weyl », premier essai d'une « théorie unitaire » englobant dans un même schéma géométrique les phénomènes électromagnétiques et la gravitation. Elle était fondée, dirions-nous à présent, sur une connexion liée au groupe des similitudes (défini au moyen d'une forme quadratique de signature  $(1,3)$ ), au lieu qu'Einstein s'était borné à des connexions liées au groupe de Lorentz (groupe orthogonal pour une forme de signature

(1,3)), et plus précisément à la connexion sans torsion déduite canoniquement (par transport parallèle) d'un  $ds^2$  de signature (1,3). Cette théorie eut du moins le mérite d'élargir le cadre de la géométrie riemannienne traditionnelle et de préparer les voies aux « géométries généralisées » de Cartan, c'est-à-dire à la théorie générale des connexions liées à un groupe de Lie arbitraire.

Quant aux préoccupations philosophiques de Weyl pendant cette période d'intense fermentation, elles ne tardèrent pas (heureusement, serions-nous tentés de dire) à se couler dans un moule plus étroitement mathématique, l'amenant à chercher une base axiomatique aussi simple que possible aux structures géométriques sous-jacentes à la théorie d'Einstein et à la sienne; c'est là ce qu'il appelle le « Raumproblem », le problème de l'espace; il y consacre plusieurs articles, un cours professé à Barcelone et à Madrid, et un opuscule qui reproduit ces leçons. Il s'agit là en réalité de caractériser le groupe orthogonal (attaché à une forme quadratique, soit complexe, soit réelle et de signature quelconque) en tant que groupe linéaire, par quelques conditions simples au moyen desquelles on puisse rendre plausible que la géométrie de l'« univers » est définie localement par un tel groupe. Bien entendu, c'est la théorie des groupes de Lie et de leurs représentations qui domine la question; Weyl en donne une esquisse dans un appendice de son livre. De son côté, Cartan ne tarda pas à donner, du principal résultat mathématique de Weyl sur ce sujet, une démonstration basée sur ses propres méthodes.

Il n'était pas dans le tempérament de Hermann Weyl, une fois parvenu ainsi au seuil de l'œuvre de Cartan, de se contenter d'y jeter un coup d'œil rapide. D'autre part, à la suite peut-être d'une remarque de Study qui l'avait blessé au vif, il avait commencé à s'intéresser aux invariants des groupes classiques. Study, dans une préface de 1923, lui avait reproché, ainsi qu'aux autres relativistes, d'avoir, par leur négligence à l'égard de ce sujet, contribué à « la mise en jachère d'un riche domaine culturel »; il entendait surtout par là la théorie des invariants du groupe projectif, dans laquelle il était d'usage de faire rentrer tant bien que mal les autres groupes à l'occasion de l'étude des

covariants simultanés de plusieurs formes. Par une réaction bien caractéristique, Weyl répondit à Study, avec une promptitude extraordinaire, par un mémoire où il reprend à la base la théorie classique au moyen d'identités algébriques dues à Capelli et indique aussi comment elle s'étend aux groupes orthogonaux et symplectiques; ce qui ne l'empêche pas de protester que, « si même il avait connu aussi bien que Study lui-même la théorie des invariants, il n'aurait eu nulle occasion d'en faire usage dans son livre sur la relativité: chaque chose en son lieu! ».

La synthèse entre ces deux courants de pensée — groupes de Lie et invariants — s'opère dans son grand mémoire de 1926, mémoire divisé en quatre parties, dont il dit lui-même vers la fin de sa vie qu'il représente « en quelque sorte le sommet de sa production mathématique ». L'étude qu'avait faite Young, vers 1900, de la décomposition des tenseurs en tenseurs irréductibles définis par des conditions de symétrie avait abouti en substance à la détermination de toutes les représentations « simples », c'est-à-dire irréductibles, du groupe linéaire spécial; mais, enfermées qu'étaient ces recherches dans le cadre de la théorie traditionnelle, il leur était impossible, par définition, d'obtenir ce résultat sous la forme que nous venons de lui donner. De son côté, Cartan, parti de la théorie générale des groupes de Lie, avait déterminé toutes les représentations en question, sans d'ailleurs, semble-t-il, faire le lien entre ses résultats et ceux d'Young. Désignons par  $G$  le groupe linéaire spécial, et par  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie, qui se compose de toutes les matrices de trace 0; soit  $\mathfrak{h}$  l'ensemble des matrices diagonales contenues dans  $\mathfrak{g}$ . Une représentation simple de  $G$  détermine une représentation simple  $\rho$  de  $\mathfrak{g}$ , donc une représentation de  $\mathfrak{h}$ . Cartan montre que l'espace  $V$  de la représentation  $\rho$  est engendré par des vecteurs qui sont vecteurs propres de toutes les opérations  $\rho(H)$ , pour  $H \in \mathfrak{h}$ . Soit  $e$  l'un de ces vecteurs propres; on a  $\rho(H) \cdot e = \lambda(H) e$ , où  $\lambda$  est une forme linéaire sur  $\mathfrak{h}$ , qu'on appelle le *poinds* de  $e$ ; si  $H$  est la matrice diagonale de coefficients  $a_1, \dots, a_n$ , il est facile de voir que  $\lambda(H)$  est de la forme  $m_1 a_1 + \dots + m_n a_n$ , où les  $m_i$  sont des entiers déterminés à l'addition près d'un même entier. Si on ordonne lexicographiquement l'ensemble des systèmes  $(m_1, \dots, m_n)$  de  $n$  entiers, on

obtient donc une relation d'ordre dans l'ensemble des poids des représentations de  $G$ . On appelle *poids fondamental* d'une représentation simple le plus grand des poids de cette représentation pour la relation d'ordre qu'on vient de définir. Cartan avait montré que ce poids détermine complètement la représentation (à une équivalence près), qu'il correspond à un système d'entiers  $(m_i)$  tel que  $m_1 \leq \dots \leq m_n$ , et que réciproquement tout système d'entiers satisfaisant à ces inégalités appartient au poids fondamental d'une représentation simple de  $G$ . Soient de plus  $\rho, \rho'$  deux représentations simples de  $G$ , opérant respectivement sur des espaces vectoriels  $V, V'$ ; soient  $\lambda, \lambda'$  leurs poids fondamentaux; soient  $e, e'$  des vecteurs de  $V, V'$ , de poids respectifs  $\lambda, \lambda'$ . Le produit tensoriel  $\rho \otimes \rho'$  de  $\rho$  et  $\rho'$  (dit parfois encore « produit kroneckérien », et noté le plus souvent  $\rho \times \rho'$  par Weyl) est une représentation opérant sur un espace  $V \otimes V'$  de dimension égale au produit de celles de  $V$  et  $V'$ , qui est formé de combinaisons linéaires d'éléments se transformant par  $G$  comme les produits formels  $xx'$ , avec  $x \in V, x' \in V'$ ; et, pour cette représentation, le vecteur  $e \otimes e'$  est de poids  $\lambda + \lambda'$ . Soit  $W$  le sous-espace de  $V \otimes V'$  engendré par  $e \otimes e'$  et ses transformés par  $G$ ; il découle facilement des résultats de Cartan que  $W$  ne peut pas se décomposer en somme directe de sous-espaces invariants par les opérations de  $G$ ; et Cartan avait cru pouvoir déduire de là que  $W$  fournit la représentation simple de poids dominant  $\lambda + \lambda'$ . Weyl observa que cette conclusion est illégitime tant qu'on ne sait pas a priori que les représentations de  $G$  sont toutes semi-simples (c'est-à-dire complètement réductibles). A vrai dire, ce dernier résultat n'était pas indispensable pour se convaincre du fait que la décomposition d'Young de l'espace des tenseurs fournit toutes les représentations simples de  $G$ ; Young avait en effet établi l'irréductibilité des représentations qu'il avait construites, et il suffisait d'établir par un calcul facile que leurs poids dominants sont tous ceux prévus par la théorie de Cartan. Mais on n'eût obtenu ainsi que la classification des représentations simples. Au contraire, en démontrant la complète réductibilité de toutes les représentations de  $G$ , Weyl en obtint du même coup (compte tenu des résultats de Young et Cartan) la classification définitive, qui s'exprime par le fait que



toute « grandeur linéaire », comme il dit, se décompose en tenseurs irréductibles.

On sait aujourd'hui démontrer le théorème de complète réductibilité par des méthodes algébriques; c'est là le point de départ de la théorie cohomologique des algèbres de Lie. Mais c'est de considérations tout autres que Weyl tire sa démonstration. Il observe, comme l'avait déjà fait Hurwitz dans son mémoire sur la construction d'invariants par la méthode d'intégration, que la théorie des représentations du groupe linéaire spécial *complexe*  $G$  est équivalente à celle des représentations du groupe  $G_u$  formé des matrices *unitaires* appartenant à  $G$ ; en dernière analyse, cela tient à ce que toute identité algébrique entre coefficients d'une matrice unitaire reste vraie pour une matrice quelconque. Or  $G_u$  possède une propriété importante qui n'appartient pas à  $G$ : il est *compact*, ce qui permet, comme l'avait fait voir Hurwitz, de construire des invariants pour  $G_u$  et par suite pour  $G$  par intégration dans l'espace du groupe  $G_u$  au moyen de l'élément de volume invariant fourni par la théorie de Lie. La méthode classique qui permet d'établir la complète réductibilité des représentations des groupes finis par construction d'une forme hermitienne, définie positive, invariante par les opérations du groupe, s'étend alors d'elle-même au groupe  $G_u$ .

Ce n'est pas seulement le théorème de complète réductibilité pour  $G$  que Weyl tire de la restriction au groupe unitaire  $G_u$ ; il s'en sert aussi pour calculer explicitement les caractères et les degrés des représentations simples de  $G$ . On voit tout de suite, en effet, que si  $\chi$  est le caractère d'une représentation de  $G_u$ , et si  $s$  est une matrice diagonale unitaire de déterminant 1 et de coefficients diagonaux  $e(x_1), \dots, e(x_n)$ , la valeur de  $\chi(s)$  s'exprime comme somme de Fourier finie en  $x_1, \dots, x_n$  et ne change pas par une permutation quelconque des  $x_i$ . Weyl montre que ces propriétés, jointes aux relations d'orthogonalité fournies, elles aussi, par la méthode d'intégration, suffisent déjà à déterminer complètement les caractères et à en obtenir des expressions explicites.

La suite du mémoire de Weyl est consacrée à l'extension des méthodes ci-dessus aux groupes orthogonaux et symplectiques, puis aux groupes semi-simples les plus généraux. Soit cette

fois  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple complexe; pour en étudier les représentations, Weyl va appliquer la méthode de restriction unitaire au groupe adjoint  $G$  de  $\mathfrak{g}$ , mis sous forme matricielle relativement à une base convenable de  $\mathfrak{g}$ . Pour qu'il y ait dans  $G$  « assez » d'opérations unitaires, il est nécessaire que  $\mathfrak{g}$  admette ce qu'on appelle aujourd'hui une forme compacte, ou pour mieux dire une base telle que les combinaisons linéaires réelles des éléments de cette base forment l'algèbre de Lie d'un groupe compact. En examinant chaque groupe simple séparément, Cartan avait vérifié dans chaque cas l'existence d'une forme compacte; Weyl en donne une démonstration a priori basée sur les propriétés des constantes de structure de  $\mathfrak{g}$ . Cela fait, il introduit le groupe  $G_u$  des opérations unitaires de  $G$ , et son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_u$ . Le groupe  $G_u$  est compact, et la théorie des représentations de  $\mathfrak{g}_u$  est équivalente à celle des représentations de  $\mathfrak{g}$ . Mais ici se présente une difficulté nouvelle; du fait que  $G_u$  peut n'être pas simplement connexe, la théorie des représentations de  $\mathfrak{g}_u$  n'est plus entièrement équivalente à celle des représentations de  $G_u$ . Si on cherche à rétablir l'équivalence en remplaçant  $G_u$  par son revêtement universel  $G_u^*$ , qui, lui, est simplement connexe, il devient nécessaire de s'assurer que celui-ci est compact, et aussi d'en faire un groupe, localement isomorphe à  $G_u$ . Ce dernier point, qui devait peu après être élucidé par Schreier, est complètement laissé de côté dans le mémoire de Weyl. Mais c'est dans le premier que résidait la véritable difficulté. La question revient naturellement à faire voir que  $G_u$  a un groupe fondamental fini. Pour cela, Weyl introduit un sous-groupe  $A_u$  de  $G_u$ , qui joue le même rôle que le groupe des matrices diagonales dans la théorie du groupe unitaire spécial. Tout élément  $s$  de  $G_u$  est conjugué à un élément de  $A_u$ ; excluant certains éléments  $s$ , dits singuliers, qui forment un ensemble ayant trois dimensions de moins que  $G_u$ ,  $s$  n'est conjugué qu'à un nombre fini d'éléments de  $A_u$ ; de plus, les éléments de  $A_u$  qui ne sont pas singuliers forment dans  $A_u$  un domaine simplement connexe  $\Delta$ . Supposons que  $s$  décrive dans  $G_u$  une courbe fermée  $\Gamma$  qui ne rencontre pas l'ensemble des éléments singuliers. Si  $s(t)$  est le point de paramètre  $t$  sur  $\Gamma$ , on peut déterminer par continuité une courbe  $a(t)$  dans  $A_u$  telle que, pour tout  $t$ ,  $a(t)$  soit conjugué à  $s(t)$ .

Quand le point  $s(t)$  revient à sa position initiale  $s(1) = s(0)$ , le point  $a(t)$  vient en un point  $a(1)$  qui est un élément de  $A_u$  conjugué de  $a(0)$ , ce qui ne laisse pour ce point qu'un nombre fini de possibilités. Si on a  $a(1) = a(0)$ , la courbe décrite par  $a(t)$  est fermée, et par suite réductible à un point dans  $\Delta$ ; Weyl montre que  $\Gamma$  est alors elle-même réductible à un point. Il en résulte facilement que le groupe fondamental de l'ensemble des éléments non singuliers de  $G_u$  est fini. De cela, et du fait que les éléments singuliers se répartissent sur des sous-variétés ayant au moins trois dimensions de moins que  $G_u$ , Weyl conclut (à vrai dire sans démonstration) que  $G_u$  lui-même a un groupe fondamental fini.

Ce point établi, la voie est ouverte à la généralisation complète au cas semi-simple des résultats obtenus pour le groupe linéaire spécial. Weyl démontre la complète réductibilité des représentations de  $\mathfrak{g}$ , et détermine explicitement le caractère et le degré d'une représentation simple de poids dominant donné. Ici encore, cette détermination résulte des relations d'orthogonalité entre caractères et des propriétés formelles de la restriction  $\chi$  d'un caractère au groupe  $A_u^*$  qui recouvre  $A_u$  dans le revêtement simplement connexe  $G_u^*$  de  $G_u$ . Ce groupe est un tore;  $\chi$  est une combinaison linéaire finie de caractères de ce tore, invariante par les opérations d'un certain groupe fini  $S$  d'automorphismes du tore qui généralise le groupe des permutations de  $x_1, \dots, x_n$  dont il a été question plus haut à propos du groupe unitaire spécial. Le groupe  $S$ , dont les développements ultérieurs de la théorie ont montré qu'il y joue un rôle fondamental, s'appelle maintenant le groupe de Weyl.

Enfin la théorie s'achève par la démonstration de l'existence des représentations simples de poids fondamental donné. Pour les algèbres simples, cette existence avait été établie par Cartan par des constructions directes dans chaque cas particulier. Weyl, lui, applique au groupe compact  $G_u^*$  la méthode de décomposition de la « représentation régulière », obtenue au moyen de la théorie des équations intégrales suivant l'idée que nous avons exposée plus haut. Pour conclure à partir de là, il lui faut encore un lemme de nature plus technique, énoncé seulement dans le mémoire de 1926, et dont Weyl n'a publié la démonstration que

dans son cours de 1934-35 (paru à Princeton sous forme de notes miméographiées, *The structure and representations of continuous groups*).

\* \* \*

Beaucoup plus tard, Weyl revint sur la détermination des représentations des groupes semi-simples dans son ouvrage *The classical groups, their invariants and representations*. L'esprit de ce livre est assez différent de celui du mémoire de 1926. L'objet de l'auteur est maintenant d'une part de démontrer par des méthodes purement algébriques les résultats déjà obtenus au sujet des représentations des groupes classiques (groupe linéaire général, groupe linéaire spécial, groupe orthogonal et groupe symplectique), et d'autre part de faire la synthèse entre ces résultats et la théorie formelle des invariants qui s'était développée sous l'influence de Cayley et Sylvester au cours du XIX<sup>e</sup> siècle. Espérait-il cette fois se laver définitivement du reproche de Study en ramenant à la vie cette théorie qui était sur le point de sombrer dans l'oubli ? Il nous dit lui-même que la démonstration par Hilbert du théorème général de finitude avait « presque tué le sujet » ; on peut se demander si Weyl ne lui aura pas, en réalité, porté le coup de grâce.

La situation dans laquelle on se trouve en théorie des invariants est la suivante. On a une ou plusieurs représentations linéaires  $\rho, \rho', \dots$ , d'un groupe  $G$ , opérant sur des espaces vectoriels  $V, V', \dots$ . On considère des fonctions  $F(x, x', \dots)$  dépendant d'un argument  $x$  dans  $V$ , d'un argument  $x'$  dans  $V'$ , etc. et s'exprimant comme polynômes par rapport aux coordonnées de ces arguments, homogènes par rapport aux coordonnées de chacun d'eux. Une telle fonction s'appelle un invariant si, pour tout  $s$  dans  $G$ , on a

$$F(s.x, s.x', \dots) = F(x, x', \dots).$$

Si  $J_1, \dots, J_h$  sont des invariants, tout polynôme en  $J_1, \dots, J_h$  en est un aussi pourvu qu'il satisfasse aux conditions d'homogénéité imposées. Le premier problème de la théorie est de trouver des invariants  $J_1, \dots, J_h$  tels que tout autre invariant puisse s'écrire comme polynôme en les  $J_i$ ; cela fait, on se propose également

de déterminer les relations algébriques  $F(J_1, \dots, J_h) = 0$ , dites « syzygies », qui lient entre eux les invariants qu'on a construits.

Plaçons-nous plus particulièrement dans le cas où  $G$  a été identifié, au moyen d'une certaine représentation  $\rho_1$ , avec un sous-groupe du groupe linéaire à  $n$  variables, opérant sur l'espace vectoriel  $V_1 = k^n$ , où  $k$  est un corps de base qu'on suppose de caractéristique 0. Considérons d'abord le cas où les représentations  $\rho, \rho', \dots$ , coïncident toutes avec  $\rho_1$ ; on dit alors qu'on cherche les invariants d'un certain nombre de « vecteurs » (on entend par là des vecteurs de  $V_1$ ). Reprenant sans grand changement son travail de 1924 par lequel il avait répondu à Study, Weyl montre alors, pour un groupe  $G$  unimodulaire, que la détermination des invariants de vecteurs en nombre quelconque peut se ramener, au moyen des identités de Capelli, au problème analogue pour  $n - 1$  vecteurs. Si  $G$  n'est pas unimodulaire, ce résultat reste vrai pour les « invariants relatifs » (polynômes se multipliant par une puissance du déterminant de  $s$  quand on transforme tous les vecteurs par  $s$ ). Weyl déduit de là la solution des deux problèmes ci-dessus pour le groupe unimodulaire et pour le groupe orthogonal; et il étend cette solution au cas des invariants dépendant, non seulement d'un certain nombre de vecteurs « cogrédients » (se transformant suivant  $\rho_1$ ), mais aussi d'un certain nombre de vecteurs « contragrédients » (se transformant comme les formes linéaires sur  $V_1$ ). Ensuite il passe aux invariants dépendant de « quantités »  $x, x', \dots$  appartenant à des espaces de représentation quelconques du groupe étudié; le cas où  $x, x', \dots$  sont des formes homogènes par rapport aux coordonnées d'un vecteur « contragredient » est celui dont traitait plus particulièrement la théorie classique. Pour pouvoir aborder la question dans ce cadre général, il faut avant tout connaître les représentations simples du groupe; aussi une partie importante du livre est-elle consacrée à la détermination algébrique des représentations « tensorielles » des groupes classiques. Cela fait, Weyl montre que les invariants dépendant de plusieurs « quantités » d'espèce quelconque s'expriment comme polynômes en un nombre fini d'entre eux; il étend ce résultat, dans une certaine mesure, au groupe affine. Enfin, il emploie la méthode d'intégration pour démontrer le résultat correspondant pour les

représentations quelconques d'un groupe compact, le corps de base étant cette fois le corps des réels.

\* \* \*

Pour fêter son soixante-dixième anniversaire, les amis et élèves de Hermann Weyl publièrent un volume de *Selecta* extraits de son œuvre. Il n'y a peut-être pas lieu de se féliciter de cette mode des morceaux choisis destinés à célébrer la mise à la retraite de mathématiciens éminents. C'est trop pour les uns; ce n'est pas assez pour les autres. Du moins le volume en question contient-il une bibliographie complète de l'œuvre de Hermann Weyl, établie par ordre chronologique<sup>5</sup>, et dont nous avons naturellement fait grand usage pour rédiger la présente notice. Pour remédier en quelque mesure aux inévitables lacunes de celle-ci, nous donnons ci-dessous une liste des mémoires de Weyl, classés par sujet; rien ne peut mieux, croyons-nous, en faire ressortir l'étonnante variété. Les numéros, bien entendu, renvoient à la liste des *Selecta*.

### I. *Analyse.*

- a) Equations intégrales singulières: 1, 3.
- b) Problèmes de valeurs propres et développements fonctionnels associés à des équations différentielles ou aux différences finies: 6, 7, 8, 12, 103.
- c) Répartition des valeurs propres d'opérateurs complètement continus en physique mathématique: 13, 16, 17, 18, 19, 22.
- d) Espace de Hilbert: 4, 5.
- e) Phénomène de Gibbs et analogues: 10, 11, 14.
- f) Equations différentielles liées à des problèmes physiques: 36-37 (développements asymptotiques, apparentés au phénomène de Gibbs, au voisinage d'une discontinuité dans un

---

<sup>5</sup> Il convient de signaler qu'on n'a pas fait figurer dans cette bibliographie les notes de cours, publiées sous forme miméographiée par l'Institute for Advanced Study de Princeton, et qui reproduisent plusieurs des cours qu'il y professa.

- problème d'électromagnétisme), 123-124-125 (étude directe d'une équation différentielle liée à un problème de couche limite).
- g) Problèmes elliptiques: 121 (principe de Dirichlet traité par la « méthode de projection » dans un espace de Hilbert), 130, 153-154-155 (problème de type elliptique dans un domaine non borné).
- h) Egale répartition modulo 1 et applications: 20, 21, 23, 42, 44, 113, 114.
- k) Développements suivant les coefficients des représentations sur un groupe compact: 73, 98.
- l) Fonctions presque périodiques: 71, 72, 145.
- m) Courbes méromorphes: 112, 129.
- n) Calcul des variations: 104.

## II. Géométrie.

- a) Surfaces et polyèdres convexes: 25, 27, 106.
- b) Analysis situs: 24, 26, 57-58-59, 159.
- c) Connexions, géométrie différentielle liée à la relativité: 30, 31, 34, 43, 50, 82.
- d) Volume des tubes: 116 (contient déjà, essentiellement, la formule de Gauss-Bonnet pour les variétés plongées dans un espace euclidien).

## III. Invariants et groupes de Lie.

- a) « Raumproblem »: 45, 49, 53, 54.
- b) Invariants: 60 (1<sup>re</sup> partie), 63, 97, 117, 122.
- c) Groupes de Lie et leurs représentations: 61, 62, 68, 69, 70, 74, 79, 80, 81.

## IV. Relativité.

- 29, 33, 35, 39, 40, 46, 47, 48, 51, 52, 55, 56, 64, 65, 66, 89, 93, 134, 135.

V. *Théorie des quanta.*

75, 83, 84, 85, 86, 87, 90, 91, 100, 101, 140, 141.

VI. *Théorie des algèbres.*

a) Matrices de Riemann: 99, 107, 108.

b) Questions diverses: 96, 105 (spineurs, en commun avec R. Brauer), 109, 110, 143.

VII. *Théorie géométrique des nombres*

(d'après Minkowski et Siegel).

120, 126, 127, 136.

VIII. *Logique.*

9, 32, 41, 60 (2<sup>e</sup> partie), 67, 77, 78.

IX. *Philosophie.*

111, 118, 119, 138, 142, 156, 163.

X. *Articles historiques et biographiques.*

15, 88, 94, 95, 102, 131, 132, 137, 147, 149, 150, 152, 157, 160, 161, 162; et la conférence « Erkenntnis und Besinnung », *Studia Philos.*, 15 (Basel, 1955) (traduction française dans *Rev. de Théol. et Philos.*, Lausanne, 1955).

XI. *Varia.*

2, 28, 38, 76, 92, 115, 128, 133, 139, 144, 146, 148, 151, 158.

---