Deuxième exposé

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

les fonctions s et c y variant en sens contraire; l'éventualité d'une limite infinie n'est pas à retenir, car elle entraînerait que la fonction s ait pour dérivée $+\infty$ sur l'intervalle $\left(0, \frac{p}{2}\right)$, ce qui contredit le fait que pour k assez grand $s(x) - kx$ ne peut croître constamment sur cet intervalle.

Remarque. — Si r est la limite de $s(h)/h$, il en résulte que la fonction $t = s/c$ a pour dérivée r/c^2, qui est une fonction croissante sur l'intervalle $\left(0, \frac{p}{2}\right)$; donc t est convexe sur cet intervalle, avec la même dérivée à l'origine, r, que s; comme $e\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, on a $s\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $t\left(\frac{p}{4}\right) = 1$, donc r vaut au moins $\frac{4}{p} s\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{2}$ et au plus $\frac{4}{p} t\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{4}{p}$.

Définition du nombre π. — C'est le nombre p tel que la dérivée à l'origine de $e_p(x)$ soit i (c'est-à-dire $r = 1$); on a donc $2\sqrt{2} < \pi < 4$. On pose, bien sûr, $e_\pi(x) = e^{ix}$, $c_\pi(x) = \cos x$, $s_\pi(x) = \sin x$, $t_\pi(x) = tg\, x$. On a donc établi:

Théorème 4. — Il existe un nombre π, et une fonction exponentielle unitaire e^{ix} dont les périodes sont les multiples entiers de 2π, dérivable et de dérivée $i\, e^{ix}$. Toute fonction exponentielle unitaire est de la forme $x \to e^{ikx}$, avec k réel.

Deuxième exposé

En intégrant l'identité (1) par rapport à y, on voit que toute fonction exponentielle f vérifie

$$f(x) \int_a^b f(y)\, dy = \int_a^b f(x+y)\, dy = \int_{a+x}^{b+x} f(u)\, du$$

donc est dérivable et proportionnelle à sa dérivée, d'où le lemme:

Lemme. — Toute fonction exponentielle vérifie une équation différentielle de la forme

$$y' = ry \tag{7}$$

où r est une constante, réelle pour une fonction réelle, et imaginaire pure pour une fonction unitaire.

Ce dernier point résulte de ce que $y\bar{y} = 1$ entraîne

$y'\bar{y} + \bar{y}'y = 0$, donc $r + r = 0$; réciproquement, r imaginaire pure entraîne $y\bar{y}$ constant pour toute solution de (7).

Fonctions exponentielles réelles

Au changement près de x en rx, elles vérifient l'équation différentielle

$$y' = y\,. \tag{8}$$

Montrons que cette équation possède une solution et une seule, prenant la valeur 1 pour $x = 0$.

Si une solution $f(x)$ ne s'annule pas, et est par exemple positive, sa dérivée aussi, donc f est strictement croissante, donc admet une fonction réciproque $x = g(y)$ vérifiant $g'(y) = 1/y$.

Inversement, posons, pour $y > 0$, $\log y = \int_1^y \frac{dt}{t}$; la fonction log est strictement croissante et prend toute valeur réelle; en effet, on a l'identité

$$\log xy = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^{y} \frac{dt}{t} + \int_y^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^{y} \frac{dt}{t} + \int_1^{x} \frac{dt}{t} = \log x + \log y\,, \tag{9}$$

donc si $\log y$ avait une limite b pour $y \to 0$ ou pour $y \to +\infty$, cette limite vérifierait $b = b + \log x$, ce qui est impossible.

Ainsi la fonction $x = \log y$ admet une fonction réciproque partout définie, positive, croissante, continue et vérifiant (1), qu'on désignera par $y = e^x$.

Si une fonction $f(x)$ vérifie (8) et si $f(0) = 1$, alors $e^{-x} f(x)$ a une dérivée nulle, donc est constante et égale à 1, ce qui prouve l'unicité annoncée.

De ceci, on déduit facilement les théorèmes 1 et 2.

Remarque. — Le nombre $e = e^1$ est ici défini par l'égalité $\int_1^e \frac{dt}{t} = 1$, d'où l'on déduit facilement $2 < e < 4$.

Autre remarque. — L'application à l'équation (8) de la méthode des approximations successives donne la série

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

d'où $\quad e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \dots = 2{,}7 \dots$

Fonctions exponentielles unitaires

Au changement près de x en kx, elles vérifient l'équation

$$y' = iy \tag{10}$$

On a vu qu'une solution de cette équation ne peut s'annuler qu'identiquement; donc s'il existe une solution $e(x)$ égale à 1 pour $x = 0$ (donc à valeurs de module 1), cette solution est unique, et c'est une fonction exponentielle unitaire, car les fonctions $x \to e(x + y)$ et $x \to e(x)\, e(y)$ sont deux solutions de (10) prenant la même valeur pour $x = 0$, donc sont identiques.

Désignons par $c(x)$, $s(x)$ les parties réelles et imaginaires de la solution éventuelle $e(x)$, et par $t(x)$ le quotient $s(x)/c(x)$ pour $c(x) \neq 0$, c'est-à-dire $e(x) \neq \pm i$; on a alors

$$s' = c \qquad c' = -s \qquad\qquad c(0) = 1 \qquad s(0) = 0 \tag{11}$$

$$t' = 1 + t^2 \qquad\qquad t(0) = 0 \;. \tag{12}$$

La fonction t est croissante, donc a une fonction réciproque $x(t)$ de dérivée $1 + t^2$.

Inversement, considérons pour t réel quelconque

$$\text{Arc}\, tg\, t = \int_0^t \frac{du}{1 + u^2} \tag{13}$$

Cette fonction Arc tg est continue et croissante, avec une limite finie pour $t \to +\infty$; en effet, pour $t > 1$ on a

$$\int_0^t \frac{du}{1+u^2} < \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} + \int_1^t \frac{du}{u^2} < \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} + 1 \;.$$

Désignons cette limite par $\frac{\pi}{2}$; la fonction réciproque $t = \text{tg}\, x$ est donc définie (pour l'instant) sur l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, et continue et croissante; en posant

$$e(x) = \frac{1 + it}{\sqrt{1 + t^2}} \tag{14}$$

on définit une solution de (10) égale à 1 pour $x = 0$, définie sur l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, de partie réelle positive; de plus, elle reste continue si l'on pose $e\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$ et $e\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$.

Prolongeons la définition de $e(x)$ à R en posant $e(x + \pi) = -e(x)$; on voit aussitôt que $e(x)$ est continue sur R; elle est dérivable, avec dérivée vérifiant (10), sauf peut-être aux points $\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, k étant entier. Il est aisé de se défaire de cette restriction, en raisonnant, par exemple, comme suit:

La fonction $e\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - ie(x)$ est nulle, par exemple pour $x = -\frac{\pi}{4}$, donc étant solution de (10) pour $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, elle est nulle sur cet intervalle, donc aussi, par le prolongement, pour tout x non multiple entier de $\frac{\pi}{2}$; donc, étant continue, elle est identiquement nulle; et, comme $e\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ est dérivable pour $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, $e(x)$ l'est aussi, avec la valeur correcte de la dérivée.

On a donc prouvé les théorèmes 3 et 4.

Remarque. — De $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, on déduit

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{du}{1 + u^2},$$

d'où l'on déduit immédiatement $2 < \pi < 4$, et facilement $\pi = 3{,}1\ \ldots$

Autre remarque. — Soit $r = u + iv$ un nombre complexe quelconque, la fonction exponentielle solution de (7) n'est autre que $e^{ux}\, e^{ivx}$, qu'on posera égal à e^{rx}; ceci définit, en faisant $x = 1$, e^r pour r complexe de façon compatible avec ce qui précède, avec (1) et avec le développement en série.

Troisième exposé

La fonction de variable complexe

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \ldots \tag{15}$$