

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 3 (1957)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LA FONCTION EXPONENTIELLE COMPLEXE  
**Kapitel:** Troisième exposé  
**Autor:** Poitou, Georges  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-33745>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 16.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

on définit une solution de (10) égale à 1 pour  $x = 0$ , définie sur l'intervalle  $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ , de partie réelle positive; de plus, elle reste continue si l'on pose  $e\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$  et  $e\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$ .

Prolongeons la définition de  $e(x)$  à  $\mathbb{R}$  en posant  $e(x + \pi) = -e(x)$ ; on voit aussitôt que  $e(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ; elle est dérivable, avec dérivée vérifiant (10), sauf peut-être aux points  $\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ ,  $k$  étant entier. Il est aisé de se défaire de cette restriction, en raisonnant, par exemple, comme suit:

La fonction  $e\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - ie(x)$  est nulle, par exemple pour  $x = -\frac{\pi}{4}$ , donc étant solution de (10) pour  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ , elle est nulle sur cet intervalle, donc aussi, par le prolongement, pour tout  $x$  non multiple entier de  $\frac{\pi}{2}$ ; donc, étant continue, elle est identiquement nulle; et, comme  $e\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  est dérivable pour  $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ ,  $e(x)$  l'est aussi, avec la valeur correcte de la dérivée.

On a donc prouvé les théorèmes 3 et 4.

*Remarque.* — De  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ , on déduit

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2},$$

d'où l'on déduit immédiatement  $2 < \pi < 4$ , et facilement  $\pi = 3,1 \dots$

*Autre remarque.* — Soit  $r = u + iv$  un nombre complexe quelconque, la fonction exponentielle solution de (7) n'est autre que  $e^{ux} e^{ivx}$ , qu'on posera égal à  $e^{rx}$ ; ceci définit, en faisant  $x = 1$ ,  $e^r$  pour  $r$  complexe de façon compatible avec ce qui précède, avec (1) et avec le développement en série.

### TROISIÈME EXPOSÉ

La fonction de variable complexe

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots \quad (15)$$

est partout définie et vérifie l'identité différentielle

$$d e^z = e^z dz \tag{16}$$

*Théorème.* — Pour que les nombres complexes  $x$  et  $y$ , ce dernier non nul, vérifient  $y = e^x$ , il faut et il suffit qu'il existe un chemin  $c$  d'origine 1, d'extrémité  $y$ , évitant 0, tel que

$$\int_c \frac{du}{u} = x. \tag{17}$$

*Démonstration.* — « Il suffit »:

Soit  $u = g(t)$  la fonction de  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) définissant le chemin  $c$ ;  $g$  est supposée non nulle, continue, et par morceaux continûment dérivable, avec  $g(0) = 1$  et  $g(1) = y$ ; par hypothèse, on a

$$x = \int_c \frac{du}{u} = \int_0^1 \frac{g'(t)}{g(t)} dt.$$

Posons, pour  $0 \leq t \leq 1$ ,

$$v(t) = \int_0^t \frac{g'(t)}{g(t)} dt \quad \text{et} \quad f(t) = e^{v(t)}.$$

D'après (16), on a

$$f'(t) g(t) = f(t) g'(t)$$

donc le rapport  $f(t)/g(t)$  est constant par morceaux, donc constant par continuité, donc égal à 1 puisque  $f(0) = g(0) = 1$ ; de sorte qu'on a pour  $t = 1$

$$y = g(1) = f(1) = e^x \quad \text{c.q.f.d.}$$

« Il faut »:

Pour tout  $x = a + ib$ , il existe un chemin  $c$  tel que (17); en effet, définissons  $c$  comme composé d'un chemin  $c'$  sur l'axe réel et d'un chemin  $c''$  sur un cercle centré en 0; le choix de  $c'$  pour que  $\int_c \frac{du}{u} = a$  est possible puisque l'intégrale  $\int \frac{du}{u}$  est divergente en 0 et à l'infini; d'autre part, si on paramètre un cercle centré à l'origine, privé de son point négatif, par

$$X = R \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad Y = R \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad X + iY = R \frac{1 + it}{1 - it}$$

on a, sur ce cercle

$$\int \frac{du}{u} = 2i \int \frac{dt}{1+t^2}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^2}{dt} =$  est un nombre fini non nul, noté  $\pi$ , et l'intégrale sur le cercle entier vaut  $2i\pi$ ; le choix de  $c''$  pour que  $\int_{c''} \frac{du}{u} = ib$  est donc toujours possible.

D'après « il suffit », l'extrémité  $y$  du chemin  $c$  tel que (17) est  $e^x$ .

*Remarque.* — Le chemin ainsi défini n'a pour extrémité 1 que si  $x$  est multiple entier de  $2i\pi$ ; donc ces nombres sont les seuls tels que  $e^x = 1$ .

*Autre remarque.* — Si

$$\int_c \frac{du}{u} = x, \quad \int_d \frac{du}{u} = y, \quad \text{on a} \quad \int_{c+e^x d} \frac{du}{u} = x + y,$$

et le chemin  $c + e^x d$  a pour extrémité  $e^x e^y$ , donc on a (1).

*Reçu le 13 mars 1957.*