

4. The number of zeros.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

4. THE NUMBER OF ZEROS.

THEOREM 2. For $n \geq 1$ let $z_{k,n}$ be the probability that exactly k among the n partial sums S_1, \dots, S_n vanish. For $n = 0$ put

$$(4.1) \quad z_{0,0} = 1, \quad z_{1,0} = z_{2,0} = \dots = 0.$$

Then

$$(4.2) \quad z_{k,2n} = \frac{2^k}{2^{2n}} \binom{2n-k}{n}.$$

Proof. By definition

$$(4.3) \quad z_{0,2n} = p_{2n} = u_{2n}, \quad (n \geq 0).$$

To evaluate $z_{1,2n}$ denote by B_r the event that among the partial sums S_1, \dots, S_{2n} exactly one vanishes and its index equals $2r$. Then for $r < n$

$$\begin{aligned} B_r &= \{ S_1 \neq 0, \dots, S_{2r-1} \neq 0, S_{2r} = 0, S_{2r+1} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0 \} \\ &\equiv \{ S_1 \neq 0, \dots, S_{2r-1} \neq 0, S_{2r} = 0 \} \cap \{ S_{2r+1} - S_{2r} \neq 0, \dots, S_{2n} - S_{2r} \neq 0 \}. \end{aligned}$$

Since the two events on the right are stochastically independent and the B_r are mutually exclusive we conclude that

$$(4.5) \quad z_{1,2n} = \sum_{r=1}^n P \{ B_r \} = \sum_{r=1}^n f_{2r} z_{0,2n-2r}.$$

Now by Theorem 1 the last event on the right in (4.4) has the same probability as the event $\{ S_{2n} - S_{2r} = 0 \}$ and hence we have for $r \leq n$

$$(4.6) \quad P \{ B_r \} = P \{ S_1 \neq 0, \dots, S_{2r-1} \neq 0, S_{2r} = 0, S_{2n} = 0 \}.$$

The events appearing on the right side are mutually exclusive and their union is the event $\{ S_{2n} = 0 \}$; hence

$$(4.7) \quad \sum_{r=1}^n P \{ B_r \} = P \{ S_{2n} = 0 \} = u_{2n}.$$

Comparing (4.5) and (4.7) we see that

$$(4.8) \quad z_{1,2n} = u_{2n} = z_{0,2n} \quad \text{for } n \geq 1.$$

In like manner we can calculate $z_{2,2n}, z_{3,2n}, \dots$ from the recursion formula

$$(4.9) \quad z_{k,2n} = \sum_{r=1}^{n-1} f_{2r} z_{k-1,2n-2r}, \quad k \geq 2, \quad n \geq 1.$$

which is proved exactly as (4.5). For $k \geq 2$ the right side differs from the right side in (4.5) only in that the term $r = n$ is absent, and therefore

$$(4.10) \quad z_{k,2n} = z_{1,2n} - f_{2n} = 2z_{1,2n} - z_{0,2n-2}, \quad n \geq 1.$$

From the last two relations we see directly by induction that for $k \geq 2$ and $n \geq 1$ we have the recursion formula

$$(4.11) \quad z_{k,2n} = 2z_{k-1,2n} - z_{k-2,2n-2}$$

If we write $z_{k,2n} = 2^{k-2n} a_{k,2n}$ then (4.11) reduces to

$$(4.12) \quad a_{k-1,2n} = a_{k,2n} + a_{k-2,2n-2}$$

which is the well-known addition relation for binomial coefficients, and thus (4.2) holds.

This theorem has the following surprising

COROLLARY. For each $n \geq 1$ we have

$$(4.13) \quad z_{0,2n} = z_{1,2n} > z_{2,2n} > z_{3,2n} > \dots > z_{n,2n}$$

Thus, independently of the number n of steps, the *most probable number of zeros* is 0, and the smaller the number, the more probable it is.

5. THE NUMBER OF CHANGES OF SIGN.

We say that in the sequence S_1, \dots, S_{2n} a *change of sign occurs at the place j* if S_{j-1} and S_{j+1} are of opposite signs. This requires that $S_j = 0$, and so j must be even. Given the first $2n$ terms