

## 6. The expectations.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

of the sequence we can speak of changes of sign only at the places  $j \leq 2n - 2$ .

**THEOREM 3.** *Let  $c_{r, 2n}$  denote the probability that there exist exactly  $r$  indices  $j$  such that*

$$(5.1) \quad S_{j-1} S_{j+1} < 0, \quad 1 \leq j \leq 2n - 1.$$

Then

$$(5.2) \quad c_{r, 2n} = \frac{1}{2^{2n-2}} \binom{2n-1}{n-1-r}.$$

*Proof.* Let us say that two sequences  $S_1, \dots, S_m$  and  $S'_1, \dots, S'_m$  are *similar* if  $|S_j| = |S'_j|$  for  $j = 1, 2, \dots, m$ . Obviously  $-S_1, -S_2, \dots, -S_{2n}$  represents the only sequence similar to  $S_1, \dots, S_{2n}$  and such that changes of sign occur at the same places. On the other hand, if exactly  $k$  among the terms  $S_1, \dots, S_{2n-2}$  vanish, there exist exactly  $2^{k+1}$  sequences similar to the sequence  $S_1, \dots, S_{2n}$ . Out of  $k$  places we may choose  $r$  places in  $\binom{k}{r}$  different ways, and it is therefore seen that

$$(5.3) \quad \begin{aligned} c_{r, 2n} &= 2 \sum_{k=r}^{n-1} \binom{k}{r} 2^{-(k+1)} z_{k, 2n-2} \\ &= \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{k=r}^{n-1} \binom{k}{r} \binom{2n-2-k}{n-1} \end{aligned}$$

A well-known formula for binomial coefficients<sup>3</sup> which can be proved by induction now shows that (5.2) is true.

In (5.2) we recognize the binomial distribution and we have the obvious.

**COROLLARY:**

$$(5.4) \quad c_{0, 2n} > c_{1, 2n} > c_{2, 2n} > \dots > c_{n-1, 2n}.$$

## 6. THE EXPECTATIONS.

**THEOREM 4.** *Let  $Z_{2n}$  and  $C_{2n}$  denote, respectively, the number of zeros and the number of changes of sign among the terms  $S_1, \dots,$*

<sup>3</sup> See, for example, formula (9.14) of Chapter 2 of the book quoted above.

$S_{2n-1}$ . For the expectations of these random variables we have

$$(6.1) \quad 2 E (C_{2n}) = E (Z_{2n}) = 2nu_{2n} - 1$$

and thus

$$(6.2) \quad 2 E (C_{2n}) = E (Z_{2n}) \sim \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} (2n)^{1/2} \text{ as } n \rightarrow \infty .$$

(These formulas shows that the density of the zeros and of changes of sign decreases at a fast rate.)

*Proof.* Define new random variables by  $Y_j = 1$  if  $X_j = 0$ , and  $Y_j = 0$  if  $X_j \neq 0$ . Then

$$(6.3) \quad 2 E (C_{2n}) = E (Z_{2n}) = \sum_{j=1}^{2n-1} E (Y_j) = \sum_{r=1}^{n-1} u_{2r} .$$

and (6.1) follows by induction.

### 7. LATER RETURNS TO THE ORIGIN.

As a further application of the present elementary approach let us prove an important formula half of which has been proved by rather involved analytical methods <sup>4</sup>.

**THEOREM 5.** Let  $f_{k,2n}$  denote the probability that the  $k$ -th return to the origin takes place at the  $2n$ -th step (that is,  $f_{k,2n}$  is the probability that  $S_{2n} = 0$  and exactly  $r - 1$  among the  $S_j$  with  $1 \leq j < 2n$  vanish). Then

$$(7.1) \quad f_{k,2n} = z_{k,2n} - z_{k+1,2n} = \frac{2^k}{2^{2n}} \binom{2n-k}{n} \frac{k}{2n-k} .$$

*Proof.* It is clear that  $f_{1,2n} = f_{2n}$  and that the  $f_{k,2n}$  satisfy the recurrence relation (4.9) and hence also (4.11). If we define  $f_{0,2n} = 0$  for  $n \geq 1$  and  $f_{0,0} = 1$ , then (7.1) is true for  $k = 0, 1$  and therefore for all  $k \geq 0$ .

Reçu le 17 mai 1957.

<sup>4</sup> See, for example, *ibid.*, formula (6.15) of Chapter 12.