SUR LES QUADRATURES MÉCANIQUES

Autor(en): **Favard, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-33749

SUR LES QUADRATURES MÉCANIQUES

PAR

J. FAVARD, Paris

---

1. — La variété surabondante des formules de quadratures mécaniques incite à les enseigner à partir d'une modeste théorie. Dans les lignes qui suivent, je donne le schéma de l'exposé que j'ai adopté dans mon cours de l'Ecole polytechnique, car un exposé détaillé serait fastidieux pour le public de ce journal.

2. — Par similitude on peut toujours se ramener au cas où il s'agit d'évaluer l'intégrale d'une fonction $f(x)$ définie dans le segment $[0, 1]$, et dont nous supposerons qu'elle admet des dérivées bornées au moins jusqu'à l'ordre employé dans les formules.

Pour valeur approchée de l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)\,dx\,, \tag{2,1}$$

on prend la somme:

$$\sum_1^k m_i f(\xi_i)\,, \tag{2,2}$$

où les ξ_i sont des nombres donnés tels que

$$0 \leqslant \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k \leqslant 1$$

et où les m_i, également donnés, sont des coefficients que nous supposerons choisis de façon que la somme (2, 2) coïncide avec l'intégrale (2, 1) lorsque $f(x)$ est une fonction linéaire, ce qui donne:

$$\sum_1^k m_i = 1\,, \quad \sum_1^k m_i\,\xi_i = \frac{1}{2}\,. \tag{2,3}$$

Pour étudier l'erreur commise en remplaçant l'intégrale (2, 1) par la somme (2, 2), considérons la fonction:

$$\overline{B}_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad \text{pour } 0 < x < 1, \quad B_1(0) = B_1(1) = 0 \tag{2,4}$$

et périodique de période 1 (figure 1). Pour ξ donné, on a:

$$\int_0^1 \overline{B}_1(x-\xi)\,dx = \int_0^1 \overline{B}_1(x)\,dx = 0, \tag{2,5}$$

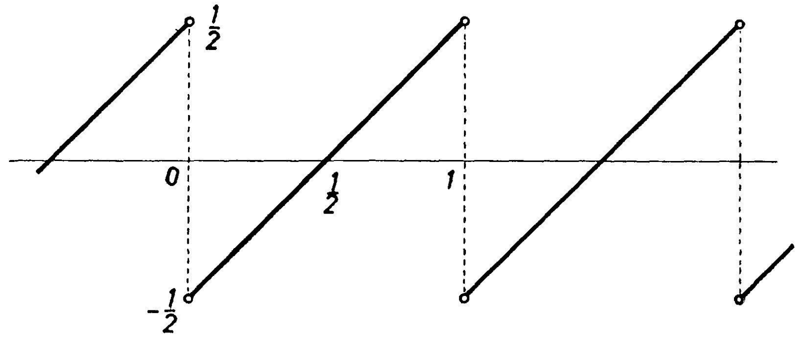

Fig. 1

puis:

$$\int_0^1 f'(x)\,\overline{B}_1(x-\xi)\,dx = [f(1)-f(0)]\left(\frac{1}{2}-\xi\right) - \int_0^1 f(x)\,dx + f(\xi).$$

Posant à présent:

$$\overline{\mathbf{B}}_1(x) = \sum_1^k m_i\,\overline{B}_1(x-\xi_i), \tag{2,6}$$

il vient:

$$\int_0^1 f'(x)\,\overline{\mathbf{B}}_1(x)\,dx = [f(1)-f(0)]\sum_{i=1}^k m_i\left(\frac{1}{2}-\xi_i\right) - \\ - \left(\sum m_i\right)\int_0^1 f(x)\,dx + \sum_{i=1}^k m_i f(\xi_i)$$

soit, d'après (2,3):

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=1}^k m_i f(\xi_i) - \int_0^1 f'(x)\,\overline{\mathbf{B}}_1(x)\,dx. \tag{2,7}$$

De (2, 5) et (2, 6) on déduit:

$$\int_0^1 \overline{\mathbf{B}}_1(x)\,dx = 0$$

par suite, les primitives de la fonction périodique $\overline{\mathbf{B}}_1(x)$ sont périodiques; appelons alors $\overline{\mathbf{B}}_2(x)$ celle dont la valeur moyenne est nulle, $\overline{\mathbf{B}}_2(x)$ aura à son tour une primitive périodique à valeur moyenne nulle, et ainsi de suite; $\overline{\mathbf{B}}_n(x)$ sera définie par:

$$\text{(2,8)} \qquad \frac{d\,\overline{\mathbf{B}}_n(x)}{dx} = n\,\overline{\mathbf{B}}_{n-1}(x)\,, \qquad \int_0^1 \overline{\mathbf{B}}_n(x)\,dx = 0 \qquad (n > 1)\,.$$

Comme $\mathrm{B}_1(x) = x - \frac{1}{2}$ est le polynome de Bernoulli de degré un, on voit par (2, 6) qu'on a:

$$\overline{\mathbf{B}}_n(x) = \sum_1^k m_i\,\overline{\mathrm{B}}_n(x - \xi_i)$$

où $\overline{\mathrm{B}}_n(x)$ désigne la fonction périodique de période 1, continue pour $n > 1$, et égale au polynôme de Bernoulli $\mathrm{B}_n(x)$, de degré n, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, les polynomes de Bernouilli étant définis par la relation de récurrence

$$\mathrm{B}'_n(x) = n\,\mathrm{B}_{n-1}(x)\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\,,$$

avec

$$\mathrm{B}_0(x) \equiv 1 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \mathrm{B}_n(t)\,dt = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Posons alors:

$$\mathbf{B}_n = \overline{\mathbf{B}}_n(0) = \overline{\mathbf{B}}_n(1) = \sum_1^k m_i\,\overline{\mathrm{B}}_n(-\xi_i) = \sum_1^k m_i\,\mathrm{B}_n(1 - \xi_i)$$

des intégrations par parties successives donnent:

(2,9)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_1^k m_i f(\xi_i) - \frac{\mathbf{B}_2}{2\,!}[f'(1) - f'(0)] + \frac{\mathbf{B}_3}{3\,!}[f''(1) - f''(0)] +$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{\mathbf{B}_n}{n\,!}[f^{(n-1)}(1) - f^{(n-1)}(0)] + \frac{(-1)^n}{n\,!}\int_0^1 f^{(n)}(x)\,\overline{\mathbf{B}}_n(x)\,dx\,.$$

Cette formule est souvent employée avec la variante suivante: on rassemble les deux derniers termes du second membre et on écrit:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_1^k m_i f(\xi_i) - \frac{\mathbf{B}_2}{2!}[f'(1) - f'(0)] + \dots + \tag{2,9'}$$

$$+ (-1)^{n-2}\frac{\mathbf{B}_{n-1}}{(n-1)!}[f^{(n-2)}(1) - f^{(n-2)}(0)] + \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 f^{(n)}(n)\,[\mathbf{B}_n(x) - \mathbf{B}_n]\,dx$$

la valeur absolue de l'erreur commise ne dépasse pas:

$$\frac{\mathrm{M}_n}{n!}\int_0^1 \left|\overline{\mathbf{B}}_n(x) - \mathbf{B}_n\right| dx$$

lorsque [1]: $|f^n(x)| \leqslant \mathrm{M}_n$, et cette borne est atteinte pour: $f^{(n)}(x) = \mathrm{M}_n\, sgn\,[\overline{\mathbf{B}}_n(x) - \mathbf{B}_n]$.

Une autre variante consiste à déterminer, quand on le peut, la constante $\mathbf{A}_n$ de façon que: $\int_0^1 \left|\overline{\mathbf{B}}_n(x) - \mathbf{A}_n\right| dx$, soit minimum, et on écrit:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_1^k m_i f(\xi_i) + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}(\mathbf{B}_n - \mathbf{A}_n)\,[f^{(n-1)}(1) -$$

$$- f^{(n-1)}(0)] + \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 f^{(n)}(n)\,[\overline{\mathbf{B}}_n(x) - \mathbf{A}_n]\,dx\,, \tag{2,9''}$$

la valeur absolue de l'erreur commise ne dépasse pas:

$$\frac{\mathrm{M}_n}{n!}\int_0^1 \left|\overline{\mathbf{B}}_n(x) - \mathbf{A}_n\right| dx\,.$$

Ce procédé a été employé pour des besoins théoriques, dans le cas de la méthode des trapèzes (voir ci-dessous) [2].

---

[1] Dans le cas des fonctions tabulées supposant que: $B_2 = \dots = B_{n-1} = 0$ on se contente d'évaluer M_n à partir des différences d'ordre n des valeurs données de la fonction.

[2] Une évaluation grossière donne: $\left|\overline{\mathbf{B}}_n(x)\right| \leqslant n!$ et, par suite:

$$\left|\overline{\mathbf{B}}_n(x)\right| \leqslant \left(\sum_1^k |m_i|\right) n!, \text{ et, en particulier: } \left|\mathbf{B}_n\right| \leqslant \left(\sum_1^k |m_i|\right) n!$$

donc, en posant: $f(x) = e^{zx}$ dans (2,9'), on peut faire croître n indéfiniment et il vient, après une transformation immédiate:

$$\frac{1}{e^z - 1}\cdot\sum_1^k m_i\, e^{z\xi_i} = \frac{1}{z} + \frac{\mathbf{B}_2}{2!}z + \dots + (-1)^n\frac{\mathbf{B}_n}{n!}z^{n-1} + \dots$$

la série du second membre étant convergente, au moins pour $|z| < 1$, et cette relation permet de calculer les $\mathbf{B}_n$ de proche en proche.

Nous allons examiner quelques cas particuliers.

3. — Pour mémoire, rappelons que, dans le cas de la *méthode des trapèzes* ($k = 2$, $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$, $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$), comme $\overline{\mathbf{B}}_n(x) = \overline{\mathrm{B}}_n(x)$, d'oû $\mathbf{B}_n = \mathrm{B}_n$, on profite du fait que tous les B_n sont nuls pour n impair plus grand que 1, et on écrit:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{f(0) + f(1)}{2} - \sum_{p=1}^{n} \frac{\mathrm{B}_{2p}}{(2p)!}\left[f^{(2p-1)}(1) - f^{(2p-1)}(0)\right] +$$

$$(3,1) \qquad + \frac{1}{(2n+2)!}\int_0^1 f^{(2n+2)}(x)\left[\overline{\mathrm{B}}_{2n+2}(x) - \mathrm{B}_{2n+2}\right] dx$$

mais: $\overline{\mathrm{B}}_{2n+2}(x) - \mathrm{B}_{2n+2}$ a toujours le signe de $(-1)^{n+1}$, et le théorème de la moyenne appliqué au reste donne:

$$\frac{1}{(2n+2)!}\int_0^1 f^{(2n+2)}(x)\left[\overline{\mathrm{B}}_{2n+2}(x) - \mathrm{B}_{2n+2}\right] dx =$$

$$= \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_0^1 (\overline{\mathrm{B}}_{2n+2}(x) - \mathrm{B}_{2n+2})dx = -\frac{\mathrm{B}_{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi)$$

$$(0 < \xi < 1) .$$

Comme $\overline{\mathrm{B}}_{2n+2}(x)$ a un seul extremum pour $0 < x < 1$, atteint pour $x = \frac{1}{2}$, on voit facilement que le minimum de $\int_0^1 \left|\overline{\mathrm{B}}_{2n+2}(x) - \mathrm{A}_{2n+2}\right| dx$, est réalisé pour:

$$\mathrm{A}_{2n+2} = \mathrm{B}_{2n+2}\left(\frac{1}{4}\right) = \mathrm{B}_{2n+2}\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{\mathrm{B}_{2n+2}}{2^{2n+2}}\left[1 - \frac{1}{2^{2n+1}}\right]$$

et ce minimum vaut:

$$\frac{4}{2n+3}\left|\mathrm{B}_{2n+3}\left(\frac{1}{4}\right)\right| .$$

Il vient alors:

$$\frac{1}{(2n+2)!}\int_0^1 f^{(2n+2)}(x)\left[\overline{\mathrm{B}}_{2n+2}(x) - \mathrm{B}_{2n+2}\right] dx =$$

$$-\frac{\mathrm{B}_{2n+2} - \mathrm{B}_{2n+2}\left(\frac{1}{4}\right)}{(2n+2!}\left[f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(0)\right] + \mathrm{R}$$

avec:

$$|R| < \frac{4\,M_n}{(2n+3)!}\left|B_{2n+3}\left(\frac{1}{4}\right)\right|\;;$$

or, lorsque n augmente indéfiniment, le rapport:

$$\frac{4}{(2n+3)!}\left|B_{2n+3}\left(\frac{1}{4}\right)\right| \Big/ \frac{|B_{2n+2}|}{(2n+2)!}$$

tend en croissant vers $\frac{2}{\pi}$ $(< \frac{2}{3})$; cette nouvelle limitation est donc intéressante.

4. — Quant à la *méthode de Simpson*, on a:

$$k = 3;\quad \xi_1 = 0\,,\quad \xi_2 = \frac{1}{2}\,,\quad \xi_3 = 1;\quad m_1 = m_3 = \frac{1}{6}\,,\quad m_2 = \frac{4}{6}$$

de sorte que $\overline{\mathbf{B}}_n(x)$, que nous désignerons dans ce cas particulier par $\overline{S}_n(x)$, vaut:

$$\overline{S}_n(x) = \frac{1}{6}\left[\overline{B}_n(x) + 4\,\overline{B}_n\left(x-\frac{1}{2}\right) + \overline{B}_n(x-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\overline{B}_n(x) + 2\,\overline{B}_n\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]$$

et, pour $\overline{S}_n(0) = \overline{S}_n(1) = S_n$, à partir de $B_n\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)B_n$, il vient:

$$S_n = -\frac{B_n}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-2}}\right)\quad n > 1\,,\quad S_1 = 0\,.$$

Les S_n d'indice impair sont nuls, les premières valeurs sont:

$$S_2 = 0\,,\quad S_4 = \frac{1}{120}\,,\quad S_6 = -\frac{5}{672}\,.$$

Ci-dessous (fig. 2) on a dessiné les courbes $\overline{S}_n(x)$ $0 \leqslant x \leqslant 1$, pour $n = 1, 2, 3$; de la forme de $\overline{S}_3(x)$ suit que, pour $n \geqslant 3$, le dessin des $\overline{S}_n(x)$ est le même que celui des $\overline{B}_n(x)$, à une symétrie près par rapport à Ox; en particulier: $[\overline{S}_{2n}(x) - S_{2n}]$ ne change pas de signe dans l'intervalle $(0, 1)$, pour $n \geqslant 2$, et on peut donc procéder à une amélioration analogue à celle donnée ci-dessus, en introduisant:

$$S_{2n+2}\left(\frac{1}{4}\right) = B_{2n+2}\left(\frac{1}{4}\right)\quad \text{et}\quad S_{2n+3}\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{B_{2n+3}\left(\frac{1}{4}\right)}{3}\,.$$

Le rapport

$$\frac{4}{(2n+3)!}\left|S_{2n+3}\left(\frac{1}{4}\right)\right| \Big/ \frac{|S_{2n+2}|}{(2n+2)!}$$

tend encore vers $\frac{2}{\pi}$.

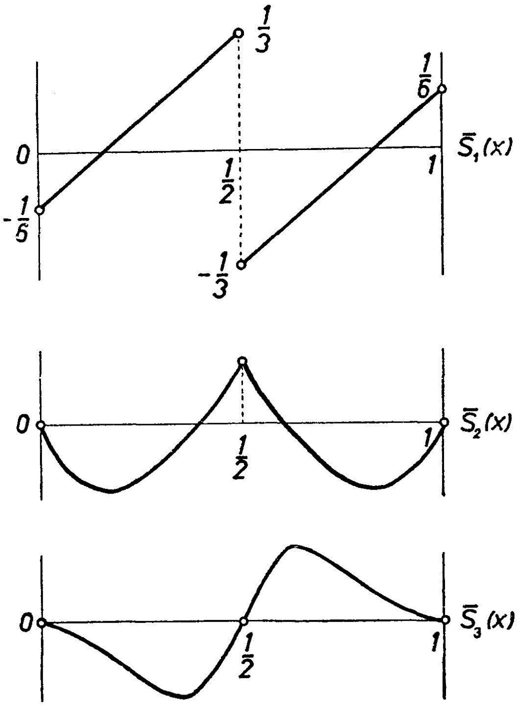

Fig. 2

5. — Pour qu'une méthode de quadrature soit sans reste pour les polynômes de degré inférieur à n, il faut et il suffit que: $\mathbf{B}_p = 0$, pour $p = 2, \ldots, n - 1$; la *méthode de Gauss* consiste, pour k donné, à annuler tous les $\mathbf{B}_p$ jusqu'à l'ordre $(2k - 1)$; les ξ_i sont alors, comme on sait, les zéros du polynôme de Legendre de degré k, polynôme défini à un facteur près, par:

$$Q_k(x) = \frac{d^k}{dx^k}[x^k(x-1)^k],$$

et on a: $0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_k < 1$. Pour évaluer l'erreur, remarquons que la fonction $\overline{\mathbf{B}}_1(x)$ a, au plus, $(2k - 1)$ changements de signe dans $(0, 1)$, en comptant parmi les changements de signe les points ξ_i où $\overline{\mathbf{B}}_1(\xi_i - 0)$ et $\overline{\mathbf{B}}_1(\xi_i + 0)$ n'ont pas le même signe (figure 3, $k = 2$). D'autre part, d'après (2, 8), et en tenant compte du fait que tous les $\mathbf{B}_n$ sont nuls jusqu'à $n = 2k - 1$, on a:

$$\overline{\mathbf{B}}_n(x) = n \int_0^x \overline{\mathbf{B}}_{n-1}(t)\, dt \quad (n \leqslant 2k-1),$$

les fonctions $\overline{\mathbf{B}}_n(x)$ étant continues pour $n > 1$, un dessin grossier est facile à tracer; en particulier on voit que $\overline{\mathbf{B}}_2(x)$ présente au plus $(2k - 2)$ changements de signe, que $\overline{\mathbf{B}}_3(x)$ en a, au plus,

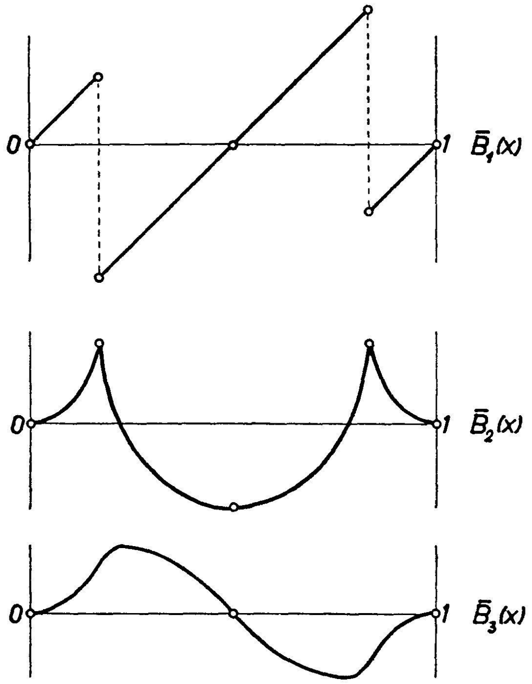

Fig. 3

$(2k - 3)$, et ainsi de suite jusqu'à $\overline{\mathbf{B}}_{2k-1}(x)$ qui présente au plus un changement de signe dans $(0,1)$, mais en a nécessairement un puisque sa valeur moyenne est nulle [3]; $\overline{\mathbf{B}}_{2k-1}(x)$ a donc un dessin analogue à celui de $\overline{\mathrm{B}}_{2k-1}(x)$, à une symétrie près par rapport à Ox. Il s'ensuit que, pour $n \geqslant 2k - 1$, les dessins des $\overline{\mathbf{B}}_n(x)$ sont analogues à ceux des $\overline{\mathrm{B}}_n(x)$ (toujours à une symétrie près par rapport à Ox); en particulier: $[\overline{\mathbf{B}}_{2k}(x) - \mathbf{B}_{2k}]$ garde un signe constant; par $(2, 9')$, on a donc:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_1^k m_i f(\xi_i) + \frac{1}{(2k)!} \int_0^1 f^{(2k)}(x) \left[\overline{\mathbf{B}}_{2k}(x) - \mathbf{B}_{2k}\right] dx$$

L'erreur de la formule de quadrature de Gauss est donc, en supposant $f^{(2k)}(x)$ continue:

---

[3] Ce raisonnement peut être généralisé lorsque, comme c'est le cas le plus fréquent, les m_i sont tous positifs.

$$\frac{f^{(2k)}(\xi)}{(2k)!}\int_0^1 \left[\overline{\mathbf{B}}_{2k}(x) - \mathbf{B}_{2k}\right] dx = -\frac{f^{(2k)}(\xi)}{(2k)!}\mathbf{B}_{2k} \quad (0 < \xi < 1) .$$

La quantité $\mathbf{B}_{2k}$ se calcule facilement en prenant pour $f(x)$ le polynôme $[Q_k(x)]^2$, de degré $2k$, qui s'annule aux points ξ_i, et on trouve:

$$\mathbf{B}_{2k} = -\frac{1}{(2k+1)}\left[\frac{(k!)^2}{(2k)!}\right]^2 .$$

Les nombres suivants, $\mathbf{B}_{2k+2}$, $\mathbf{B}_{2k+4}$, ... qui sont rationnels, peuvent se calculer de proche en proche, mais la formule générale donnant $\mathbf{B}_{2k+2}$ est déjà fort compliquée, il n'y a pas intérêt à l'écrire dans le cas général.

Par contre, pour $k = 1$, tenant compte de la valeur de $B_n\left(\frac{1}{2}\right)$, on a:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2!}\frac{B_2}{2}[f'(1) - f'(0)] +$$
$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}B_{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)[f^{(n-2)}(1) - f^{(n-2)}(0)] +$$
$$+ \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 f^{(n)}(x)\left[\overline{B}_n\left(x - \frac{1}{2}\right) - B_n\left(\frac{1}{2}\right)\right] dx .$$

Par combinaison de cette formule avec celle des trapèzes, on en tire la formule de Simpson; pour p donné quelconque, on peut aussi, par combinaison, annuler le terme en $\mathbf{B}_{2p}$; la formule qui consiste à annuler $\mathbf{B}_4$ m'a été signalée par M. J. Karamata.

6. — Il y a bien des moyens de varier les formules de quadrature (2, 9 et 9'); c'est ainsi que G. Kowalewski dans son livre (*Interpolation und genäherte Quadratur*, Berlin-Leipzig, 1932), considérant un ensemble donné $\{\xi_i\}$ et posant:

$$m_i = \int_0^1 \frac{P(x)}{P'(\xi_i)(x - \xi_i)}dx , \qquad P(x) = \prod_1^k (x - \xi_i) ,$$

de sorte que la formule soit sans reste pour les polynômes de degré inférieur à k, trouve:

$$\mathbf{B}_k(x) = (x-1)^k + k \sum_{\xi_i > x} m_i (x-\xi_i)^{k-1} .$$

Partant de la formule (2,7), on peut aussi ajouter à $\overline{\mathbf{B}}_1(x)$ une constante, puis intégrer par parties en introduisant d'autres primitives que les $\overline{\mathbf{B}}_n(x)$, ce qui revient à ajouter à $\overline{\mathbf{B}}_n(x)$ un polynôme quelconque $\mathrm{P}_n(x)$ de degré inférieur à n, et nous avons la formule:

$$(6,1)\qquad \int_0^1 f(x)\,dx = \sum_1^k m_i f(\xi_i) + \mathrm{P}_n^{(n-1)}(x)[f(1)-f(0)] -$$

$$-\left(\frac{\overline{\mathbf{B}}_2(x)}{3!} + \mathrm{P}_n^{n-2}(x)\right) f'(x)\Big|_0^1 + \left(\frac{\overline{\mathbf{B}}_3(x)}{3!} + \mathrm{P}_n^{(n-3)}(x)\right) f''(x)\Big|_0^1 +$$

$$+(-1)^{n-1}\left(\frac{\overline{\mathbf{B}}_n(x)}{n!} + \mathrm{P}_n(x)\right) f^{(n-1)}(x)\Big|_0^1 + (-1)^n \int_0^1 f^{(n)}(x)\left(\frac{\overline{\mathbf{B}}_n(x)}{n!} + \mathrm{P}_n(x)\right) dx.$$

Cette variante a été utilisée de bien des façons, la plus connue est la variante permettant l'obtenir la formule de Taylor; une autre due à Petr [4], est obtenue à partir de la formule des trapèzes, lorsque $n = 2p$ est un nombre pair; son calcul revient à poser:

$$\frac{\mathrm{B}_{2p}(x)}{(2p)!} + \mathrm{P}(x) = \frac{x^p (x-1)^p}{(2p)!} .$$

Les dérivées d'ordre p, $p+1$, ..., $(2p-1)$ ne figurent pas dans le second membre de (6,1). Quant aux dérivées d'ordre $q < p$, elles figurent sous la forme

$$\mathrm{A}_q^n [f^{(q)}(0) + (-1)^q f^{(q)}(1)]$$

où A_q^n est un nombre facile à calculer; l'erreur est:

$$(-1)^p \frac{f^{(2p)}(\xi)}{(2p)!} \frac{(p!)^2}{(2p+1)!} .$$

A partir de la formule de Gauss, avec $k = 1$, comme $\mathbf{B}_{2p}(x) = \overline{\mathrm{B}}_{2p}(x-1)$, en posant:

---

[4] K. Petr (Časopis, t. 44, 1915, pp.454-55); G. N. Watson (Časopis, t. 65, 1935, pp. 1-7); G. Ricci (*Annali di Mat.*, IV, t. 15, 1936-37, pp. 187-196). Je dois ces indications bibliographiques à M. J. Karamata.

$$P(x) = \left[\frac{B_{2p}(x)}{(2p)!} - \frac{x^p(x-1)^p}{(2p)!}\right] - \left[\frac{2}{2^{2p}}\frac{B_{2p}(2x)}{(2p)!} - \frac{(2x)^p(2x-1)^p}{(2p)!}\right]$$

on obtiendra une formule analogue à celle de Petr qui, par combinaison avec la précédente, permettra d'en obtenir une autre ayant la formule de Simpson pour point de départ.

Une autre variante consiste à itérer le procédé qui a conduit à la formule (2,9) en écrivant:

$$f'(1) - f'(0) = \int_0^1 f''(x)\,dx = \sum_1^k m_i f''(\xi_i) - \frac{\mathbf{B}_2}{2!}\int_0^1 f^{\text{IV}}(x)\,dx + \ldots$$

il vient alors:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_1^k m_i f(\xi_i) - \frac{\mathbf{B}_2}{2!}\left[\sum_1^k m_i f''(\xi_i)\right] + \frac{\mathbf{B}_3}{3!}\int_0^1 f'''(x)\,dx + \\ + \left(\frac{\mathbf{B}_4}{4!} - \frac{\mathbf{B}_2^2}{(2!)^2}\right)\int_0^1 f^{\text{IV}}(x)\,dx + \ldots$$

et on continue en évaluant de la même façon $\int_0^1 f'''(x)\,dx$.

Dans le cas de la formule des trapèzes, par exemple, cela revient à l'addition du polynôme d'Euler $E_n(x)$ tel que:

$$E_n(x) + E_n(x+1) = \frac{2x^n}{n!}.$$

Pour la formule de Gauss, avec $k = 1$, il s'agit alors seulement de l'addition de deux séries de Taylor.

7. — Plus généralement, on peut se proposer d'approcher des intégrales de la forme:

$$\int_0^1 f(x)\,dg$$

où g est une fonction à variation bornée, par des expressions de la forme: $\sum_1^k m_i f(\xi_i)$; appelant alors $h(x)$ la fonction à variation bornée constante partout, sauf aux points ξ_i où elle présente un saut m_i, une intégration par parties donne, en supposant la formule sans reste pour les constantes:

$$\int_0^1 f(x)dg = \sum_1^k m_i f(\xi_i) - \int_0^1 f'(x)[g(x) - h(x)]\,dx$$

et on peut alors continuer le développement comme ci-dessus [5].

En calcul numérique, on est conduit à de telles considérations lorsqu'il s'agit de l'application, aux panneaux de tête ou de queue, d'une formule de quadrature à une fonction tabulée: on fait alors intervenir des valeurs ξ_i extérieures à l'intervalle d'intégration.

Voyons un seul exemple, relatif à la formule de Simpson; changeant les notations, pour calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$, nous ferons intervenir $f(2)$ en remplaçant $f(x)$ par le polynôme d'interpolation, du second degré, prenant les mêmes valeurs que $f(x)$ pour $x = 0, 1, 2$. On voit facilement qu'on a alors:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5f(0) + 8f(1) - f(2)}{12} - \int_0^2 \varphi_1(x) f'(x)\,dx$$

avec:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x - \dfrac{5}{12} & \text{pour} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ -\dfrac{1}{12} & \text{pour} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

Posant ensuite (figure 4):

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5}{12}x & \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\dfrac{1}{12}(x-2) & \text{pour} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases},$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{5}{24}x^2 & \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\dfrac{1}{24}(x-2)^2 & \text{pour} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

il vient:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5f(0) + 8f(1) - f(2)}{12} - \int_0^2 \varphi_3(x) f'''(x)\,dx\,.$$

---

5 M. S. Aljančić a montré que ce développement est, en général, divergent (Sur une formule sommatoire généralisée, *Publications de l'Institut math. de l'Acad. serbe* t. 2, 1948, pp. 263-269).

Comme $\varphi_3 x) \leqslant 0$, et que: $\int_0^2 \varphi_3(x)\,dx = -\frac{1}{24}$, l'erreur de la formule de quadrature est de la forme: $\frac{f'''(\xi)}{24}$, lorsque f''' est

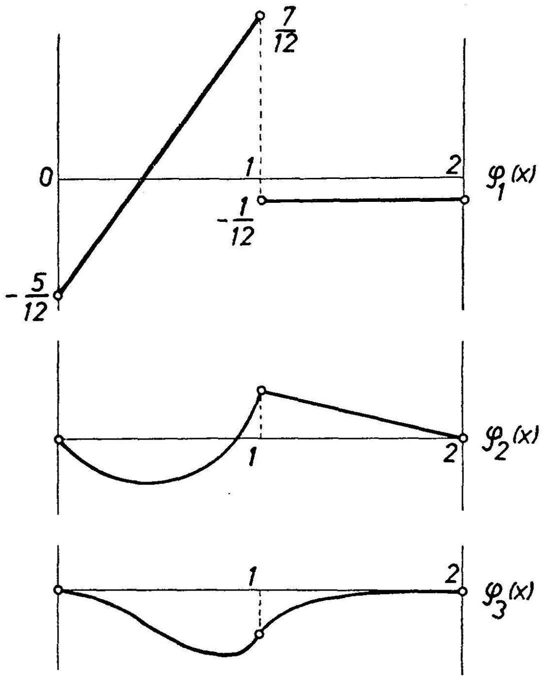

Fig. 4

continue $(0 < \xi < 2)$. On peut aussi retrancher de φ_3 sa valeur moyenne (mais alors les dérivées secondes de f, en 0 et 2, interviennent) et continuer le développement comme précédemment.

BIBLIOGRAPHIE

S. Aljančić, Sur une formule sommatoire généralisée. *Publications de l'Institut math. de l'Acad. serbe*, t. 2, 1948, pp. 263-269.

J. Karamata, *Théorie et pratique de l'intégrale de Stieltjes* (en serbe). Belgrade, 1949.

G. Kowalewski, *Interpolation und ganäherte Quadratur.* Berlin-Leipzig, 1932.

Mikeladzé, Quadratures mécaniques. *Ouspechi. Mat. Naouk*, t. 3, 1948, pp. 1-88.

K. Petr, *Časopis*, t. 44, 1915, pp. 454-455.

G. Ricci, *Annali di Mat.* (IV), t. 15, 1936-37, pp. 187-196.

R. Schmidt, Die allgemeine Newtonsche Quadraturformel... *Journal für die reine und angew. Mat.*, t. 173, 1935, pp. 52-59.

G. N. Watson, *Časopis*, t. 65, 1935, pp. 1-7.

(Reçu le 29 mai 1957.)