

ON THE MATHEMATICAL WORK OF FRANÇOIS-ÉDOUARD-ANATOLE LUCAS

Autor(en): **Harkin, Duncan**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-33750>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ON THE MATHEMATICAL WORK OF FRANÇOIS-ÉDOUARD-ANATOLE LUCAS

BY

Duncan HARKIN, Cheverly, Maryland

Most of the arithmetic investigations of Edouard LUCAS (1842-1891) are summarized in volumes I and II of Leonard Eugene DICKSON's, *History of the Theory of Numbers*, particularly in chapter xvii of volume I, which is devoted to the theory of the numerical functions which led LUCAS to a reciprocal of the classical theorem of FERMAT and to methods of factorization. In addition to the *Théorie des nombres* (only the first volume of which, unfortunately, ever appeared), LUCAS published four volumes of *Récréations mathématiques* and, as an introduction to these, *L'Arithmétique amusante*.

Edouard LUCAS, professeur au Lycée Charlemagne, residing at 56 rue Monge, Paris, thus speaks for himself in the Preface to his *Théorie des nombres*: "For a long time, we have gathered and collected many interesting documents, of all authors and from all countries, in order to write a book on the subject which concerns us. To that we add a part of our own research, which we have published to this end, from time to time, a little in many places, notably in the *Comptes rendus*, the *Bulletins* of the Academies of Sciences of Turin, Rome and St.-Petersburg, of the Mathematical Society of France; in the *American Journal* of Baltimore, in the *Comptes rendus* of the French Association for the Advancement of Sciences, in the *Nouvelles Annales de Mathématiques*, in the *Nouvelle Correspondance* and in *Mathesis*, at Brussels and Liège, in the *Messenger of Mathematics*, at Cambridge, etc."

LUCAS has left a rather clear record of his ideas. In the Preface to his *Récréations mathématiques* (Vol. I, pp. v-vi), he explains that "It was projected twenty years ago. At the same time I dreamed of editing the somewhat scattered writings of one of the greatest geniuses of mankind, the Works of Fermat*; then to publish a work on the Theory of Numbers. These difficult and profound meditations ought to offer more than unintelligibility, at a time and in a country where the higher arithmetic is deserted by mathematicians and official instruction. On them I grafted most of my work and the ordinary ramifications of personal research.

"That is not all. The Works of Fermat raise important bibliographical problems which are not yet resolved. Manuscripts are to be found, methods to be restored, all of which I hope will soon be brought to a successful conclusion."

"The first volume of the *Théorie des nombres* is about to appear; the others will follow, with my 'Commentary on the Works of Fermat'; then 'The History, the Practice and the Progress of Calculation, in all times, among all peoples.'"

LUCAS intended to continue his series of *Récréations* and himself had decided the plan of volumes 5 and 6 (see *L'Arithmétique amusante*, p. 210). A second volume of the *Théorie des nombres* was also planned, apparently rather fully worked out. Some idea of its contents is given in the advertisement on the back cover of the second edition of volume I of the *Récréations mathématiques* (1891): "Théorie des nombres. Tome II. Divisibility and Algebraic Irreducibility. Binomial Congruences and Primitive Roots." (In press.)

More specific detail of what was to be included in the proposed second volume is found elsewhere, as on page 441 of the *Théorie des nombres*, where LUCAS mentions "The Reciprocal of the Theorem of FERMAT: If $a^x - 1$ is divisible by n for x equal to $(n - 1)$ and is not divisible by n for x equal to an aliquot part of $(n - 1)$, the number n is prime. In the second volume we will give a great many corollaries."

* Actually, LUCAS was a member of the French Commission for the publication of the Works of Fermat: 1 (1891), 2 (1894), 3 (1896), 4 (1912), 5 (1922).

LUCAS openly states the basis of much of his work and reveals the mainsprings of his ideas, all in good taste and always with historical perspective. Thus, in the Preface to his *Théorie des nombres* (p. xii): "We do not pretend to compare our modest discoveries with those of all these immortal savants; but still it is by observing the series of FIBONACCI

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, . . .

in which each term is the sum of the two preceding terms, that we have encountered a new proposition which constitutes the Reciprocal of the Theorem of FERMAT. From it we have deduced a great number of corollaries which enable knowing whether a given number p of twenty or thirty digits is prime or not . . . by the use of this new process, we have enunciated a large number of theorems analogous to that of WILSON and obtained prime numbers of twenty and thirty digits, whereas the largest prime number known twenty years ago, ($2^{31} - 1$) announced by EULER, had only ten . . .

"The theory of recurrent series is an inexhaustible mine which contains all the properties of numbers."

LUCAS had already alluded to this creative calculus, inter alia, in his *Investigations on several works of Leonardo of Pisa and on various questions of the higher arithmetic* (1877, p. 107): "The profound consideration of the examples given by FERMAT and his contemporaries authorizes me to think that this illustrious savant, regarded by LAGRANGE 'as the first inventor of the new calculus' (*Leçons sur le calcul des fonctions*, nouvelle édition, p. 321, lig. 28-29 = *Œuvres de Lagrange*, 10 (1884), 297), employed in this theory, as in all those which he created but left incomplete on higher arithmetic, the consideration of recurrent series of the first kind, that is to say those in which the difference of the roots of the corresponding equation of the second degree is real and rational."

Recurrent series were, indeed, the genesis of much of LUCAS' most profound investigations and the source of many of his discoveries. Most curious and significant are his claims anent elliptic and higher transcendental functions. He alludes to this first in the *Comptes rendus* (82 (1876), 1303): "The identity of

these formulas concerning numerical functions of the roots of an algebraic equation of the fourth degree or of any degree with those which connect elliptic or abelian transcendentals."

To the arithmetization of elliptic functions, much more specific and elaborate allusions are made by LUCAS in his remarkable memoir on the "Théorie des fonctions numériques simplement périodiques" in the first volume of the *American Journal of Mathematics* (1878), pp. 184-240, 289-321.

He first explains his aim: "This memoir has as its object the study of the symmetric functions of the roots of an equation of the second degree, and its application to the theory of prime numbers. We will first show the complete analogy of these symmetric functions with the circular and hyperbolic functions; then we will show the relation which exists between these symmetric functions and the theories of determinants, of combinations, of continued fractions, of divisibility, of quadratic divisors, of continued radicals, of cyclotomy, of indeterminate analysis of the second degree, of quadratic residues, of the factorization of large numbers, etc. This method is the point of departure of a more complete study, of the properties of the symmetric functions of the roots of an algebraic equation of any degree with commensurable coefficients, in their relation to the theories of elliptic and Abelian functions, of power residues, and indeterminate analysis of higher degrees."

Later, on pages 203-204, he states explicitly: "The formulas

$$(A) \quad U_n^2 U_{m-1} U_{m+1} - U_m^2 U_{n-1} U_{n+1} = Q^{n-1} U_{m-n} U_{m+n}$$

and

$$(B) \quad U_n^3 U_{n+2} - U_{n+1}^3 U_{n-1} = Q^{n-1} U_1 U_{2n+1}$$

$$U_n^2 U_{n+1} U_{n+3} - U_{n+2}^2 U_{n-1} U_{n+1} = Q^{n-1} U_2 U_{2n+2}$$

pertain to the theory of elliptic functions and, more specifically, to the functions Θ and H of Jacobi: . . . formulas of extreme importance, the basis of the theory of doubly periodic numerical functions deduced from the symmetric functions of the roots of equations of the third and fourth degree with commensurable coefficients."

That LUCAS had carried out extensive investigations in this direction is again implied later on page 231 of the same memoir on simply periodic numerical functions: "One can in this way obtain a great many theorems serving, like that of WILSON, to verify prime numbers. We will leave aside, for the moment, the curious and new developments which we have thus found, in order to consider only those which are derived from simply periodic numerical functions."

Towards the end of this remarkable memoir, LUCAS again returns to the same tantalizing topic, this time with even further detail on page 317: "We have further indicated (sections IX and XXI) a first generalization of the principal idea of this memoir in the study of recurrent series which arise from the symmetric functions of the roots of algebraic equations of the third and fourth degree and, more generally, of the roots of equations of any degree with commensurable coefficients. One finds, in particular, in the study of the function

$$U_n = \Delta(a^n, b^n, c^n, \dots) / \Delta(a, b, c, \dots)$$

in which a, b, c, \dots designate the roots of the equation, and $\Delta(a, b, c, \dots)$ the *alternating function* of the roots, or the square root of the discriminant of the equation, the generalization of the principal formulas contained in the first part of this work.

"Finally, there remains the development of the theory of the division of numerical functions and its application to indeterminate analysis of the second degree and of higher degrees; that is a study which we hope to publish shortly."

LUCAS finds all this, interestingly enough, intimately related to the extraction of roots by arithmetic and geometric means, in Note X on this subject appended to his *Théorie des nombres* (1891): "The application of this process leads to very important formulas, which we will expound later, in the application of elliptic and abelian functions to the theory of numbers."

Certainly there are enough references in the writings of LUCAS to this most remarkable arithmetization of elliptic and abelian functions, of the greatest fundamental significance, to indicate that he had achieved far-reaching relations and interesting applications.

All search for remanent papers of LUCAS has revealed nothing. E. T. BELL, « Analogies between the u^e , v^e of Lucas and Elliptic Functions » (*Bulletin of the American Mathematical Society*, 29, 1923, 401-406) reports that “ In 1912, C.-A. LAISANT, at one time a trustee of Lucas’ manuscripts said that there was nowhere a vestige of the subject. Nevertheless LAISANT recalled vividly that LUCAS about 1878 made verbal communication to the Société mathématique de France in which he exhibited a close isomorphism between three symmetric functions, of which one was $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$, of the roots α , β , γ of a cubic equation and the elliptic functions sn , cn , dn , especially as regards a species of double periodicity.

‘ LAISANT is also authority for the statement that the ultimate object of LUCAS in his researches on recurring series was the demonstration of FERMAT’S last theorem. He recalled that in 1890, shortly before LUCAS’ death, the latter ‘ in a quarter hour ’ reduced the proof of FERMAT’S theorem to the problem of showing that each of his symmetric functions had not more than two ‘ periods ’. LAISANT remarked that at the time he perfectly followed this reduction, which was clear and convincing.”

I am indebted to Prof. Dr. Balth. VAN DER POL for the following communication of 25 January 1956: “ I have also further news to report to you on the famous crate of LUCAS. Professor SPEZIALI, about whom I have written to you before, has now contacted Mr. BELGODÈRE (secrétaire de la Société mathématique de France) in the Institut Poincaré. Mr. BELGODÈRE and Mr. GERARDIN († 1953) (Sphynx-Œdipe)—the latter knew LUCAS personally—have both gone through the papers left by LUCAS. I received the report that ‘ rien d’important, en tout cas pas la suite du Tome I de la *Théorie des Nombres* ’ has been found. The papers ‘ se trouvent dans les caves de l’Institut Poincaré et Dickson avait déjà fait demander des renseignements à ce propos.’

‘ So this looks final.’

It is too bad that margins are not wider and that “ just pieces of paper ” are sometimes scrapped—with the irretrievable loss of the fine flowering of genius.

BIBLIOGRAPHY OF THE MATHEMATICAL WORK
OF FRANÇOIS-ÉDOUARD-ANATOLE LUCAS

1866

1. Sur les théorèmes d'Euler et de Lambert. *BIOP* (1866), 81-83.
2. Concours d'admission à l'Ecole polytechnique en 1865. Propriétés de la courbe obtenue dans la composition mathématique par MM. Barbier et Lucas, astronomes de l'Observatoire de Paris. *NAM*, 2^e sér., 5 (1866), 21-31.

1867

3. *Application de l'arithmétique à la construction de l'armure des satins réguliers*. G. Retaux, Paris, nov. 1867. 16 pp.

1870

4. Sur la somme des puissances semblables des n premiers nombres entiers. *NAM*, 2^e sér., 9 (1870), 49-53.
5. Notes sur les coefficients du binôme de Newton. *NAM*, 2^e sér., 9 (1870), 308-311.

1873

6. Recherches sur l'analyse indéterminée et l'arithmétique de Diophante. *BSEA*, 12 (1873). 92 pp.

1874

7. Théorèmes de géométrie supérieure. *BSEA*, 13 (1874).

1875

8. Nouveaux théorèmes de géométrie supérieure. *BSEA*, 14 (1875). 22 pp.
9. Sur la théorie des sections coniques. *NAM*, 2^e sér., 14 (1875), 265-269, 458-464.
10. Remarque sur la question 1129. *NAM*, 2^e sér., 14 (1875), 269.
11. Question 1180. *NAM*, 2^e sér., 14 (1875), 336.
12. Sur quelques nouvelles formules de sommation. *NAM*, 2^e sér., 14 (1875), 487-494.
13. Questions d'analyse indéterminée. *NAM*, 2^e sér., 14 (1875), 509-510, 526-527.
14. Sur la décomposition des nombres en facteurs premiers. *NAM*, 2^e sér., 14 (1875), 523-525.
15. De la trisection de l'angle à l'aide du compas sphérique. *CR*, 81 (1875), 368-369; *NCM*, 2 (1875), 14-15.

1876

16. Thèses de mathématiques. Thèse de géométrie. *Sur l'application du système des coordonnées tricirculaires et tétrasphériques à l'étude des propriétés des courbes et des surfaces anallagmatiques*.
17. Thèse d'arithmétique supérieure. *Sur l'application des séries récurrentes à la recherche des grands nombres premiers*.
18. Problèmes sur l'ellipse. *NAM*, 2^e sér., 15 (1876), 5-8.
19. De la trisection de l'angle à l'aide du compas sphérique. *NAM*, 2^e sér., 15 (1876), 8-9.
20. Théorèmes nouveaux sur la parabole et l'hyperbole. *NAM*, 2^e sér., 15 (1876), 19-30.
21. Questions nouvelles d'arithmétique supérieure. *NAM*, 2^e sér., 15 (1876), 82-83.
22. Sur la relation de Möbius, qui exprime que quatre points d'un plan sont situés sur un cercle. *NAM*, 2^e sér., 15 (1876), 205-207.
23. Sur un problème de Halley relatif à la théorie des sections coniques. *NAM*, 2^e sér., 15 (1876), 207-209.

24. Solution d'un problème de Beha-Eddin (1547-1622) sur l'analyse indéterminée. *NAM*, 2^e sér., 15 (1876), 359-365.
25. Sur la solution du système des équations $x^2 - 6y^2 = u^2$, $x^2 + 6y^2 = v^2$ en nombres entiers. *NAM*, 2^e sér., 15 (1876), 466-470.
26. Sur les rapports qui existent entre le triangle arithmétique de Pascal et les nombres de Bernoulli. *NAM*, 2^e sér., 15 (1876), 497-499.
27. Questions de géométrie tricirculaire et tétrasphérique. *NAM*, 2^e sér., 15 (1876), 501-503.
28. Note sur l'application des séries récurrentes à la recherche de la loi de distribution des nombres premiers. *CR*, 82 (1876), 165-167.
29. Théorie nouvelle des nombres de Bernoulli et d'Euler. *CR*, 83 (1876), 539-541; *AFAS* (1876), 118.
30. Nouveaux théorèmes d'arithmétique supérieure. *CR*, 83 (1876), 1286-1288.
31. Sur les rapports qui existent entre la théorie des nombres et le calcul intégral. *CR*, 82 (1876), 1303-1305.
32. Sur la recherche des grands nombres premiers. *AFAS* (1876), 61-68.
33. Loi géométrique du tissage. *AFAS*, Clermont (1876), 114.
34. Démonstration d'un théorème de Lejeune-Dirichlet. *AFAS* (1876), 144.
35. Sur la théorie des nombres premiers. *ARAS*, 11 (1875-1876), 928-937.
36. Note sur le triangle arithmétique de Pascal et sur la série de Lamé. *NCM*, 2 (1876), 70-75.
37. Sur un problème d'Euler, relatif aux carrés magiques. *NCM*, 2 (1876), 97-101.
38. Sur la théorie des nombres. *NCM*, 2 (1876), 101-102.
39. Sur l'emploi du calcul symbolique dans la théorie des séries récurrentes. *NCM*, 2 (1876), 201-206.
40. Principes de géométrie tricirculaire et tétrasphérique. *NCM*, 2 (1876), 225-232, 257-265, 289-295.
41. Sur le calcul symbolique des nombres de Bernoulli. *NCM*, 2 (1876), 328-337.
42. Sur l'emploi, dans la géométrie, d'un nouveau principe des signes. *NCM*, 2 (1876), 384-391, 3 (1877), 1-5.
43. Sur un théorème de l'arithmétique indienne. *BBSS*, 9 (1876), 157-164.

1877

44. Théorie nouvelle des nombres de Bernoulli et d'Euler. *AMPA*, 2^e sér., 8 (1877), 56-79.
45. Sur l'extension du théorème de Fermat généralisé et du Canon arithmeticus. *CR*, 84 (1877), 439-442.
46. Sur la division de la circonférence en parties égales. *CR*, 85 (1877), 136-139.
47. Considérations nouvelles sur la théorie des nombres premiers et sur la division géométrique de la circonférence en parties égales. *AFAS* (1878), 159-167.
48. Sur le calcul rapide des fractions continues. *AFAS* (1877), 179-180.
49. Sur l'échiquier-anallagmatique de M. Sylvester. *AFAS* (1877), 213-214.
50. Système des coordonnées tricirculaires et tétrasphériques. *AFAS* (1877), 222.
51. Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'arithmétique supérieure. *BBSS*, 10 (1877), 129-193, 239-293.
52. On the Development of $\left(\frac{z}{1-e^{-z}}\right)^\alpha$ in a Series. *MM*, 7 (1877), 82-84.
53. On the Successive Summations of $1^m + 2^m + 3^m + \dots + x^m$. *MM*, 7 (1877), 84-86.
54. On Development in Series. *MM*, 7 (1877), 116.
55. On Eulerian numbers. *MM*, 7 (1877), 139-141.
56. Formules fondamentales de Géométrie tricirculaire et tétrasphérique. *BSMF*, 5 (1877), 136-143; *AMPA*, 2^e sér., 8 (1877), 187-193.
57. Sur les développements en séries des irrationnelles du second degré et de leurs logarithmes népériens. *BSMF*, 5 (1877), 178-190.

58. Note sur la Géométrie des quinconces. *BSMF*, 6 (1877), 156.
59. Sur le théorème de Stiefel. *NCM*, 3 (1877), 47-48.
60. Sur la généralisation de deux théorèmes dus à MM. Hermite et Catalan. *NCM*, 3 (1877), 69-73.
61. De l'application des systèmes de coordonnées tricirculaires et tétrasphériques à l'étude des figures anallagmatiques. *NCM*, 3 (1877), 225-230, 257-263.
62. Problèmes sur la Géométrie des quinconces dans le plan et dans l'espace. *NCM*, 3 (1877), 412-414.
63. Sur les sommes des puissances semblables des nombres entiers. *NAM*, 2^e sér., 16 (1877), 18-26.
64. Sur les théorèmes de Binet et de Staudt concernant les nombres de Bernoulli. *NAM*, 2^e sér., 16 (1877), 157-160.
65. Sur la résolution du système des équations $2v^2 - u^2 = w^2$ et $2v^2 + u^2 = s^2$ en nombres entiers. *NAM*, 2^e sér., 16 (1877), 409-416.
66. Solution des Questions. *NAM*, 2^e sér., 16 (1877), 429-432.
67. Sur la théorie des fonctions numériques simplement périodiques. *NCM*, 3 (1877), 369-376, 401-407.

1878

68. Théorie des fonctions numériques simplement périodiques. *AJM*, 1 (1878), 184-240, 289-321.
69. Théorèmes d'arithmétique. *ARAS*, 13 (1878), 271-284.
70. Solutions d'équations indéterminées biquadratiques. *AFAS* (1878), 80.
71. Sur l'emploi de l'arithmomètre Thomas dans l'arithmétique supérieure. *AFAS* (1878), 94-95.
72. Sur la géométrie du tissage. *AFAS* (1878), 155.
73. Sur les formules de Cauchy et de Lejeune-Dirichlet. *AFAS* (1878), 164-173.
74. Sur la série récurrente de Fermat. *BBSS*, 11 (1878), 783-798.
75. On the interpretation of a passage in Mersenne's works. *MM*, 7 (1878), 185-187.
76. On the relations between the angles of five circles in a plane or of six spheres in space. *MM*, 8 (1878), 37-42.
77. On long Successions of composite numbers. *MM*, 8 (1878), 81.
78. Théorème sur la géométrie des quinconces. *BSMF*, 6 (1877), 9-10.
79. Sur les congruences des nombres eulériens et des coefficients différentiels des fonctions trigonométriques suivant un module premier. *BSMF*, 6 (1878), 49-54.
80. Sur les développements en séries. *BSMF*, 6 (1878), 57-68.
81. Sur les suites de Farey. *BSMF*, 6 (1877), 118-119.
82. Sur un principe fondamental de géométrie et trigonométrie. *ARAL*, 3^e sér., 2 (1878). 15 pp.
83. Sur un principe fondamental de géométrie et trigonométrie. *NCM*, 4 (1878), 169-175, 200-204.
84. Sur la décomposition des nombres en bicarrés. *NCM*, 4 (1878), 323-325.
85. Sur l'équation indéterminée $X^3 + Y^3 = AZ^3$. *NAM*, 2^e sér., 17 (1878), 425-426.
86. Sur le système des équations indéterminées $x^2 - Ay^2 = u^2$, $x^2 + Ay^2 = v^2$. *NAM*, 2^e sér., 17 (1878), 446-453.
87. Sur l'analyse indéterminée du troisième degré et sur la question 802 proposée par M. Sylvester. *NAM*, 2^e sér., 17 (1878), 507-514.
88. Sur un théorème de M. Liouville, concernant la décomposition des nombres en bicarrés. *NAM*, 2^e sér., 17 (1878), 536-537.

1879

89. Récréations scientifiques sur l'arithmétique et sur la géométrie de situation. Première récréation: Sur le jeu de dames à la polonaise. *RS*, 24 (1879), 154-161.

90. Sur une application de la Mécanique rationnelle à la théorie des équations. *CR*, 89 (1879), 224-226.
91. Sur le jeu de dames à la polonaise. *AFAS* (1879), 149.
92. Sur l'irréductibilité au point de vue arithmétique. *AFAS* (1879), 162.
93. Sur le problème des huit reines. *AFAS* (1879), 193.
94. Sur l'analyse indéterminée du troisième degré. — Démonstrations de plusieurs théorèmes de M. Sylvestre. *AJM*, 2 (1879), 178-185.
95. Questions de géométrie élémentaire. *NCM*, 5 (1879), 12-13.
96. Problèmes sur les normales à l'ellipse. *NCM*, 5 (1879), 161-165.
97. Sur l'analyse indéterminée biquadratique. *NCM*, 5 (1879), 183-186.
98. Sur l'équation indéterminée biquadratique $Ax^4 + By^4 = Cz^4$. *NAM*, 2^e sér., 18 (1879), 67-74.
99. Sur les propriétés caractéristiques des nombres 5 et 7. *NAM*, 2^e sér., 18 (1879), 74-76.
100. Problème sur l'ellipsoïde. *NAM*, 2^e sér., 18 (1879), 304-305.

1880

101. Principii fondamentali della geometria dei tessuti. *ICAI*, 6 (1880). 30 pp.
102. Récréation sur le jeu des échecs, comportant la solution complète du problème des huit reines. *RS* (1880).
103. Récréations scientifiques sur l'arithmétique et sur la géométrie de situation. Le problème des huit reines. *RS*, 2^e sér., 25 (1880), 948-953.
104. Récréations scientifiques sur l'arithmétique et sur la géométrie de situation. Le jeu du baguenaudier. *RS*, 2^e sér., 26 (1880), 36-42.
105. Récréations scientifiques sur l'arithmétique et sur la géométrie de situation. Le jeu des ponts. *RS*, 2^e sér., 26 (1880), 375-380.
106. (Théorie des nombres.) Sur les fonctions cyclotomiques. *CR*, 90 (1880), 855-857.
107. Sur les nouvelles formules de MM. Seidel et Stern concernant les nombres de Bernoulli. *BSMF*, 8 (1880), 169-172.
108. Théorèmes généraux sur l'impossibilité des équations cubiques indéterminées. *BSMF*, 8 (1880), 173-187.
109. Sur l'extension du théorème de Descartes. *NCM*, 6 (1880), 250-253; *BSMF*, 8 (1880), 187-191.
110. Sur un théorème d'Euler concernant la décomposition d'un nombre en quatre cubes positifs. *NAM*, 2^e sér., 19 (1880), 89-91.
111. Sur un théorème de M. Laguerre. *NAM*, 2^e sér., 19 (1880), 145-147.
112. Sur les cas généraux d'impossibilité de l'équation $x^3 + y^3 = Az^3$. *NAM*, 2^e sér., 19 (1880), 206-211.
113. Sur un problème de Diophante. *NAM*, 2^e sér., 19 (1880), 278-279.
114. Note sur la construction des nombres à l'ellipse. *NAM*, 2^e sér., 19 (1880), 279-280.
115. Sur un théorème de M. Chasles concernant les coniques homofocales. *NAM*, 2^e sér., 19 (1880), 397-401.
116. Sur trois coniques confocales deux à deux. *NAM*, 2^e sér., 19 (1880), 401-403.
117. Notice sur les titres et travaux scientifiques de M. Edouard Lucas. D. Jouaust, rue Saint-Honoré, 338, Paris (1880). 62 pp.

1881

118. Sur le jeu du solitaire renfermant les solutions de trente problèmes gradués. *RS*, 3^e sér., 228 (1881), 365-370.
119. La Logique du calcul, d'après les données de l'observation et de l'histoire. *RS*, 28 (1881), 367n.
120. Sur le jeu des traversées en bateau. *RS*, 3^e sér., 27 (1881), 408-412.
121. Sur le jeu du taquin ou du casse-tête américain « on the 15 puzzle ». *RS*, 3^e sér., 27 (1881), 783-788.
122. Sur la déformation du cache-pot. *NAM*, 2^e sér., 20 (1881), 9-11.

1882

123. *Récréations mathématiques*. Tome 1: *Les Traversées — Les Ponts — Les Labyrinthes — Les Reines — Le Solitaire — La Numération — Le Baguenaudier — Le Taquin*. Paris, Gauthier-Villars, 1882.

1883

124. *Récréations mathématiques*. Tome 2: *Qui perd gagne — Les Dominos — Les Marelles — Le Parquet — Le Casse-Tête — Les Jeux de Demoiselle — Le Jeu icosien d'Hamilton*. Paris, Gauthier-Villars, 1883. 245 pp.
125. Entre chiens et loup (problèmes de dames). *RS*, 3^e sér., 531 (1883), 555-557.
126. Le problème géographique des quatre couleurs. *RS*, 32 (1883), 12-17.
127. Le saut du cavalier aux échecs. *RS*, 3^e sér., 632 (1883), 370-375.
128. Calendrier perpétuel julien et grégorien. *RS*, 3^e sér., 632 (1883), 812.
129. Sur la généralisation du théorème de Fermat. *CR*, 96 (1883), 1300-1301.
130. Aire du triangle. *Mths*, 3 (1883), 167.
131. Démonstration du théorème de Clausen et de Staudt sur les nombres de Bernoulli. *BSMF*, 11 (1883), 69-71.

1884

132. Sur l'Arithmétique figurative et les permutations. *AFAS* (1884), 83-97.
133. Sur un mémoire de Cauchy et sur les nombres de Bernoulli. *AFAS* (1884), 182.
134. Calendrier perpétuel julien et grégorien. *AFAS* (1884), 215-217.
135. Le calcul et les machines à calculer. *AFAS* (1884); *RS*, 3^e sér., 834 (1884), 482-496.
136. *Le problème d'Euler et les carrés magiques*. Paris, Gauthier-Villars, 1884.

1885

137. Le calcul et les machines à calculer. *AFAS* (1885), 111-141.
138. *Calendrier perpétuel à roulettes. — Appareils à calculs exacts et instantanés*. Belin, Paris, 1885.
139. Les carrés magiques de Fermat restaurés et publiés sur des documents originaux et inédits. *JME* (1885), 104-111, 130-136, 148-153, 176-180; (1887), 32-34.
140. Les appareils à calculs exacts et instantanés. *NAM*, 3^e sér., 3 (1885), 516-519.

1886

141. Le calendrier en bâtons. *AFAS* (1886), 91.
142. Construction des carrés magiques. *AFAS* (1886), 93.
143. Figuration géométrique d'une formule d'algèbre. *AFAS* (1886), 94.
144. Divers appareils de calcul. *AFAS* (1886), 249.
145. « *Les carrés magiques* », nouvelle étude. Paris, Gauthier-Villars, 1886.
146. *L'arithmétique en boules*. *N*, 14 (1886), 54-55, 66-67, 166-167, 218-219.
147. *L'arithmétique en bâtons dans l'Inde, au temps de Clovis*. *N*, 14 (1886), 282-286.
148. *Récréations scientifiques. Les reines de l'échiquier*. *N*, 14 (1886), 299-300, 358-359.

1887

149. Sur l'emploi des critères quadratiques, biquadratiques et octiques suivant un module premier. *AFAS* (1887), 83.
150. Amusements par les jetons. *N*, 15 (1887), 10-11.
151. *Récréations mathématiques. Sur les jetons et les polygones*. *N*, 15 (1887), 54-55.
152. Calendrier perpétuel. *N*, 15 (1887), 138.
153. *Récréations scientifiques. Sur le jeu de domino*. *N*, 15 (1887), 218-220.

154. Le jeu militaire. *N*, 15 (1887), 402-404.
 155. Géométrie des réseaux. *AFAS* (1887), 173.
 156. Les carrés magiques de Fermat et de Frenicle. *JME* (1887), 32-34.

1888

157. Sur un théorème de Cauchy. *AFAS* (1888), 150.
 158. L'arithmétique en boules. *N*, (1888) 696.
 159. L'arithmétique en bâtons. *N*, (1888) 697.
 160. Le jeu militaire. *N*, (1888) 701.
 161. Amusements par les jetons. *N*, (1888) 731.
 162. Le problème des reines. *N*, (1888) 734.

1889

163. *Notes de géométrie analytique à trois dimensions*. F. Pichon, Paris, 1889. 11 pp.
 164. Nouveaux jeux scientifiques. *N*, 17 (1889), 301-303.
 165. Sur les modes de croisement (dextrorsum et sinistrorsum) dans l'espace, étant données leur équations. *AFAS* (1889), 231.
 166. Sur la collection des machines à calculer du Conservatoire des arts et métiers de Paris. *AFAS* (1889), 235.
 167. Sur les coordonnées tripolaires. *Mths*, 9 (1889), 129-134, 173-181.
 168. *Jeux scientifiques pour servir à l'histoire, à l'enseignement et à la pratique du calcul et du dessin*. Première série: 1° *La Fasioulette*, 2° *La Pipopipette*. 3° *La Tour d'Hanoi*, 4° *L'Icosagonal ou le jeu des vingt forts*, 5° *L'Arithmétique diabolique ou le calcul infernal*, 6° *Les Pavés florentins du père Sébastien*, Six brochures in 8², avec illustrations. Paris, 1889.

1890

169. Le diagrammomètre du colonel Kozloff. *N*, 18 (1890), 131-134.
 170. Chinoiserie arithmétique. Un carré magique de cinquante-quatre siècles. *N* (1890), 203-204.
 171. Les appareils de calcul et les jeux de combinaisons. *RS*, 45 (1890), 1-13.
 172. Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité. *AFAS* (1890), 147.
 173. Sur les carrés magiques et leurs applications à l'arithmétique. *AFAS* (1890), 148.
 174. Sur le critérium de Paoli. *AFAS* (1890), 149.
 175. Sur quelques questions de signes en géométrie analytique. *Mths*, 10 (1890), 5-8.
 176. Sur les nombres parfaits. *Mths*, 10 (1890), 74-76.
 177. Critérium pour la formule de Paoli. *Mths*, 10 (1890), 129-132.

1891

178. Sur les théorèmes énoncés par Fermat, Euler, Wilson, Staudt et Clausen. *Mths*, 11 (1891); 2^e sér., 1 (1891), 9-12.
 179. *Théorie des Nombres*. Tome : *Le calcul des nombres entiers — Le calcul des nombres rationnels — La divisibilité arithmétique*. Paris, Gauthier-Villars, 1891. xxxiv+520.
 180. *Récréations mathématiques*. Tome 1, 2^e éd. Paris, Gauthier-Villars, 1891. xxiv+254.

1893

181. *Récréations mathématiques*. Tome 2, 2^e éd. Paris, Gauthier-Villars, 1893.
 182. *Récréations mathématiques*. Tome 3: *Le calcul digital — Machines arithmétiques — Le Caméléon — Les Jonctions de points — Le Jeu Militaire — La Prise de la Bastille — La Patte d'oie — Le Fer à cheval — Le Jeu américain — Amusements par les jetons — L'Etoile nationale — Rouge et noire*. Paris, Gauthier-Villars, 1893. vii+200.

1894

183. *Récréations mathématiques. Tome 4: Le Calendrier perpétuel — L'Arithmétique en boules — L'Arithmétique en bâtons — Les Marelles. XVIII^e siècle — Les Carrés magiques de Fermat — Les Réseaux et les Dominos — Les Régions et les quatre couleurs — La Machine à marcher.* Paris, Gauthier-Villars, 1894. VIII+266.

1895

184. *L'Arithmétique amusante. Amusements scientifiques pour l'enseignement et la pratique du calcul.* Paris, Gauthier-Villars, 1895. VIII+266.

ABBREVIATIONS FOR JOURNALS IN WHICH LUCAS PUBLISHED

- AFAS* Association française pour l'Avancement des sciences. *Compte rendu des sessions.*
- AJM* *American Journal of Mathematics pure and applied.* Baltimore.
- AMPA* *Annali di Matematiche pura ed applicata.* Milano.
- ARAL* *Atti della Reale Accademia dei Lincei.* Roma.
- ARAS* *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino.*
- BBSS* *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* Roma, ed. Boncompagni.
- BIOP* *Bulletin international de l'Observatoire de Paris.*
- BSEA* *Bulletin de la Société d'émulation du Département de l'Allier.* Moulins-sur-Allier.
- BSMF* *Bulletin de la Société mathématique de France.* Paris.
- CR* *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris.* Paris, Gauthier-Villars.
- ICAI* *L'Ingegneria Civile e le Arti industriali.* Torino.
- JME* *Journal de mathématiques élémentaires.* Paris.
- Mths* *Mathesis.* Bruxelles.
- MM* *Messenger of Mathematics.* Cambridge.
- NAM* *Nouvelles Annales de Mathématiques.* Paris, Gauthier-Villars.
- NCM* *Nouvelle correspondance mathématique.* Bruxelles, F. Hayez.
- N* *La Nature.* Paris.
- RS* *Revue scientifique de la France et de l'étranger.* Paris.

(Reçu le 14 janvier 1957.)