

savant

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1957)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

HENRI LEBESGUE

LE SAVANT, LE PROFESSEUR, L'HOMME

PAR

Arnaud DENJOY, Lucienne FELIX, Paul MONTEL, Paris

Le savant

Aujourd'hui, dans toutes les universités du monde, la mesure des ensembles dans un espace quelconque, avec les conditions fondamentales qu'elle doit remplir et l'arbitraire qu'elle admet, puis, cette mesure étant acquise, l'intégrale d'une fonction de point, élément de cet espace, ces deux doctrines liées sont enseignées à l'étudiant et apprises par lui sans offrir ni au maître ni au disciple l'apparence de la moindre difficulté. Or ces clartés, dans leurs feux complémentaires, ont jailli du cerveau de Lebesgue. Borel avait résolu le problème de la mesure euclidienne des ensembles linéaires, c'est-à-dire portés par une droite. Il avait introduit, avec d'autres principes, le plus important de tous, à savoir l'additivité complète de la mesure: quand un ensemble est formé par la réunion d'une infinité dénombrable (c'est-à-dire pas plus abondante que celle des entiers naturels) d'ensembles mesurables disjoints, cet ensemble total est mesurable et sa mesure est la somme de la série formée par les mesures des constituants. La métrique borélienne, d'ailleurs immédiatement extensible à des espaces de toute nature ou à des évaluations non euclidiennes dans les espaces cartésiens, cette magnifique conception offrait l'intérêt de donner le mot d'une énigme vainement posée à Cantor, Jordan, Minkowski et bien d'autres. Mais, sans l'application de la mesure linéaire à l'intégration des fonctions d'une variable, l'Analyse n'avait que peu de secours à attendre de la découverte de Borel.

Jusqu'à la thèse de doctorat où Lebesgue, en 1902, publia sa définition de l'intégrale, on ne disposait, pour effectuer cette opération sur les fonctions définies dans un intervalle, que de la méthode de Riemann. Seuls quelques types de fonctions discontinues, principalement les fonctions à variation bornée, étaient intégrables de cette manière. Les primitives de certaines dérivées bornées de nature très simple ne pouvaient s'obtenir par ce calcul. Les formules de Fourier, donnant les coefficients d'une série trigonométrique partout convergente dont la somme est une fonction connue, ces formules consistant en intégrales dont le coefficient est proportionnel à cette fonction-somme, n'avaient, elles non plus, pas de sens, même dans des cas assez élémentaires où cette somme est bornée.

Cette définition de l'intégrale, publiée par Riemann, précisée par Darboux, est d'un profond intérêt. C'est une très belle construction logique. Mais elle offrait à l'Analyse un instrument de bien faible puissance. Les théorèmes généraux sur l'intégration des suites convergentes n'étaient démontrés que sous des conditions très restrictives, limitant exagérément leur champ d'application. Les problèmes fondamentaux, nous en avons donné plus haut deux exemples, dont le progrès était arrêté par l'insuffisance de l'outil d'intégration, étaient nombreux. Leur solution n'était obtenue que dans des cas particuliers, pour des données continues ou affectées de discontinuités très simples. A la façon des eaux retenues par un éboulis de montagnes obstruant un défilé, les questions d'énoncé général, demeurées en suspens, s'accumulaient devant cette barrière de l'intégrale déficiente. Et de même que, sous la pesée liquide, l'obstacle ayant cédé, le lac constitué en amont se vide promptement, pareillement au fur et à mesure que l'intégrale de Lebesgue fut appliquée aux problèmes jusqu'alors résolus pour les seuls arguments continus, et par l'intégrale de Riemann, la légitimité des résultats antérieurement acquis se manifesta chaque fois que la nouvelle intégrale se substituait à l'ancienne. Et le champ de validité des résultats s'accrut démesurément dans une foule de sujets.

On a trouvé bien des images pour faire saisir la différence séparant les deux conceptions. Soit, par exemple, à calculer la hauteur moyenne d'une rivière au-dessus d'un étiage, sur la

période d'une année (non bissextile), quand la hauteur quotidienne, mesurée en centimètres, est notée. Avec Riemann, à toute fraction d'année constituée par une journée particulière, soit $1/365$, on appliquera un facteur, constituant le poids attribué à cette fraction, et ce poids sera la hauteur des eaux ce jour-là. On ajoutera les trois cent soixante-cinq produits. Avec Lebesgue, on collationnera les diverses hauteurs distinctes observées entre la plus basse et la plus élevée. A chacune de ces hauteurs on appliquera un facteur-poids qui sera la fraction d'année (nombre de jours divisé par 365) où le niveau s'est inscrit à cette hauteur. On ajoute les résultats.

Des deux façons on a obtenu la hauteur moyenne cherchée, mais celle de Lebesgue offre une immense possibilité d'extension. Il divise en parcelles le champ décrit par les diverses valeurs de la fonction, celle-ci étant un nombre. Il pose le principe que si la fonction est comprise entre A et B sur un ensemble de mesure m , sur ce même ensemble la fonction contribuera à l'intégrale pour une quantité comprise entre mA et mB . Cet énoncé, entendu par Lebesgue pour les fonctions d'une variable réelle et la mesure euclidienne des ensembles linéaires, peut être adopté pour les fonctions définies aux points d'un espace quelconque, et pour toute métrique des ensembles dans cet espace.

* * *

Lebesgue introduisit l'espèce des fonctions *mesurables*. Le progrès était immense. Car le passage à la limite, limite exacte, plus grande limite, plus petite limite, d'une suite de fonctions mesurables donne encore une fonction mesurable. Auparavant, le passage à la limite détruisait la nature de la fonction variable. Une suite convergente de fonctions continues n'est pas habituellement une fonction continue. C'est une fonction de classe 1, selon Baire. La limite d'une suite convergente de fonctions de classe 1 n'est pas normalement une fonction de classe 1, etc. Mais la limite d'une suite convergente de fonctions mesurables est mesurable. Dès lors, toutes les fonctions rencontrées dans les problèmes de l'Analyse sont mesurables. Que d'énoncés jadis encombrés d'hypothèses pour définir des cas où l'intégration

terme à terme d'une série convergente de nature donnée était légitime ! Or, si les fonctions sont bornées, leurs intégrales de Lebesgue tendent vers l'intégrale de la fonction limite. La généralité de ces résultats fit la révolution dans les méthodes de l'Analyse.

Jusqu'à Lebesgue, celle-ci se bornait sensiblement à l'étude des fonctions continues. Désormais, son champ sera formé des fonctions sommables, c'est-à-dire dont la valeur absolue est intégrable au sens de Lebesgue.

* * *

Mais celui-ci découvre un phénomène nouveau, celui du « presque partout », c'est-à-dire des propriétés vraies partout, sauf sur un ensemble de mesure nulle. D'un argument synthétique F , un argument f dérive-t-il par une opération D et, connaissant f , F est-il le résultat d'une opération intégrale I inversant D , tout au moins quand f est sommable ? Dès lors, toute fonction f_1 pour laquelle l'opération I peut s'effectuer aura pour résultat un argument F_1 dont f_1 dérivera « presque partout » par D , comme f dérivait de F . Toutefois, si ce lien réciproque n'est pas exactement réalisé par l'opération D appliquée à F_1 , ce sera par une opération D_1 plus générale que D et telle que l'opération I soit l'inverse de D_1 (et non pas seulement de D).

Ainsi une dérivée ordinaire f est-elle sommable ? Sa primitive $F(x)$ sera égale à son intégrale de Lebesgue entre a et x . Et inversement, toute fonction sommable f_1 intégrée entre a et x donne une fonction F_1 dont f_1 est la dérivée « presque partout ».

La somme f d'une série trigonométrique convergente est-elle une fonction sommable ? Les coefficients s'en obtiennent par les formules de Fourier où les intégrales sont prises au sens de Lebesgue. (Celui-ci l'avait établi simplement pour les fonctions développables bornées; de La Vallée Poussin l'a démontré pour les fonctions sommables quelconques). Et inversement, si f est sommable et si les formules de Fourier sont appliquées à cette fonction avec l'intégration de Lebesgue, on forme une série trigonométrique dont la somme est f « presque partout », à la

condition d'effectuer au besoin une sommation généralisée de la série, par la méthode de Riemann, ou par celle de Poisson.

L'expression « presque partout » n'a pas eu mon approbation. J'en ai proposé une autre: « sur une plénitude » (et auparavant: « sur une épaisseur pleine »). Connaître une fonction « presque partout » n'avance pas plus que de ne la connaître « presque nulle part » si l'on ne s'est pas assuré, par les propriétés spéciales, généralement topologiques ou « descriptives » de cette fonction, qu'il est indifférent pour le but à atteindre d'ignorer ses valeurs sur un ensemble de mesure nulle. Du point de vue topologique, c'est-à-dire pour les caractères invariants par une transformation topologique [$y = f(x)$ continue et croissante, dans le cas d'une variable], un ensemble de mesure nulle peut être un « presque partout », son complémentaire, pleine épaisseur métrique, étant topologiquement un « presque nulle part ».

* * *

Lebesgue et Borel s'opposèrent dans une violente polémique. Le premier voulait refuser à Borel la découverte de la mesure et, peut-être sous cette inspiration, il présenta la mesure comme une conséquence de l'intégrale. Mais Borel, semblant douter de ses titres de priorité incontestables pour la définition de la mesure, et laissant dédaigneusement à Lebesgue cette découverte, voulut par ailleurs contester la valeur de la nouvelle intégrale. Il prétendait obtenir celle-ci sans utiliser la mesure, en substituant à la fonction-argument f une suite de polynômes intégrée terme à terme et fournissant à la limite l'intégrale de Lebesgue. Mais le recours à ces polynômes est un artifice dénué de tout intérêt. En fait, Borel pouvait dire:

« 1^o J'ai appris à mesurer les familles d'intervalles disjoints (ensembles ouverts), les ensembles fermés, les ensembles de mesure nulle, les ensembles limites de suites croissantes ou décroissantes d'ensembles mesurables. Toutes les idées intervenant dans la théorie de la mesure m'appartiennent. Peut-être Lebesgue leur a-t-il ajouté un peu de mise en ordre.

» 2^o Si l'on étend, ce qui n'offre aucune difficulté, aux ensembles plans ma définition de la mesure linéaire, et si f est

une fonction positive donnée sur l'intervalle ab , l'aire, à mon sens, de l'ensemble $[0 < y < f(x), a < x < b]$ est l'intégrale de Lebesgue $\int_a^b f(x) dx$. J'admire d'autant plus l'intégrale de Lebesgue que je peux la revendiquer comme mienne.»

Est-ce pour déprécier la mesure que Lebesgue entendit la déduire de l'intégrale ? Ainsi donc, selon lui, le segment de l'axe réel compris entre a et b aurait pour longueur $b - a$ parce que $b - a$ est l'aire du rectangle de hauteur 1 ayant ce segment pour base. Mais cette aire n'aurait-elle pas cette valeur $b - a$ parce que tel est le volume du parallélépipède de hauteur 1 construit sur ce rectangle pris pour base, etc. ? Et cependant F. Riesz pourrait avoir donné corps à cette intuition de Lebesgue. Une fonctionnelle linéaire d'une fonction-argument f (ici l'intégrale de f sommable, sur un ensemble mesurable) est l'intégrale de Lebesgue de f quand on adopte pour mesure d'un ensemble e la valeur de la fonctionnelle pour $f = 1$ sur e et $f = 0$ hors de e . Mais F. Riesz suppose l'intégrale fondée sur le procédé de Lebesgue. Aussi, dans la définition de l'intégrale, ne pas prendre pour départ la mesure euclidienne des ensembles et vouloir tirer celle-ci de l'intégrale posée *a priori*, ce procédé adopté par Lebesgue est artificiel et bien discutable.

Borel et Lebesgue semblent tous deux avoir suspecté la solidité de leurs titres à revendiquer la découverte de la mesure euclidienne des ensembles linéaires. Dans leurs définitions de l'intégrale, chacun a voulu déprécier le rôle de la mesure : Borel en l'ignorant, Lebesgue en la faisant apparaître accessoirement comme un exemple d'intégrale.

Lebesgue a codifié les principes de la mesure des ensembles linéaires, principes déjà mis en œuvre par Borel. Celui-ci n'avait pas conçu que certains ensembles pussent être non mesurables. Lebesgue réserva une place à ceux-ci. On doit remarquer que les notions de grande généralité créées par Borel, Baire, Lebesgue, se rapportaient uniquement aux ensembles linéaires et aux fonctions d'une variable réelle.

L'équité commande d'attribuer la mesure à Borel et l'intégrale à Lebesgue. Au surplus, Borel n'a jamais tiré parti d'une intégrale différente de celle de Riemann. Et même il n'a eu à

intégrer que des fonctions continues ou ayant une singularité isolée.

* * *

Si l'intégrale et tout ce que son auteur en a tiré constitue le titre capital et impérissable de Lebesgue, on ne doit pas oublier son intervention dans bien des sujets, et toujours pour apporter des vues originales d'un profond intérêt.

Les séries trigonométriques avec les critères de convergence, la question de la non-uniformité de cette convergence pour certaines fonctions continues, le problème de Dirichlet, avec la rectification du raisonnement de Riemann pour le plan et les singularités offertes par les pointes dans le cas de l'espace; la définition de l'aire des surfaces, dans leur idée première les cribles de Lusin pour la définition des ensembles analytiques, les propriétés générales des intégrales singulières, la topologie cartésienne des variétés enlacées, l'invariance (rattachée à un remarquable principe) du nombre des dimensions dans les transformations topologiques, sur tous ces sujets, Lebesgue a jeté des idées neuves et profondes, dont le développement ultérieur des théories s'est largement inspiré.

Le seul risque à courir pour la mémoire de Lebesgue serait que, l'Analyse moderne ayant tellement identifié ses propres principes aux idées créées par lui, celles-ci ayant tellement proliféré, essaimé dans tant de directions variées, les nouvelles écoles vinssent à oublier de quel tronc initial ces immenses rameaux sont issus. Le vacarme des renommées éphémères pourra parfois étouffer le bruit de son renom. Mais la postérité saura rendre à chacun son dû et l'histoire des mathématiques fixera l'un de ses tournants dans l'apparition de l'intégrale de Lebesgue en la seconde année de ce siècle.

Le professeur

Henri Lebesgue, qui enseigna depuis sa sortie de l'École normale supérieure, d'abord au Lycée de Nancy, puis dans les Facultés de Rennes, Poitiers, Paris, puis au Collège de France et dans les deux Ecoles normales supérieures (rue d'Ulm et