Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1958)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RECHERCHES RÉCENTES SUR L'UNICITÉ DU DÉVELOPPEMENT TRIGONOMÉTRIQUE

Kapitel: 7. Le cas de irrationnel (suite). Les ensembles $H^{(n)}$ de Piatecki-Shapiro.

Autor: Salem, Raphaël

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34640

7. Le cas de ξ irrationnel *(suite)*. Les ensembles $H^{(n)}$ de Piatecki-Shapiro.

Le résultat ci-dessus ne résoud pas entièrement le problème de la classification des ensembles cantoriens E (ξ) à rapport constant ξ suivant les valeurs de ξ. Il laisse en effet intact le problème de savoir si la condition $\xi = 1/\theta$, $\theta \in C$ est non seulement nécessaire, mais aussi suffisante pour que E (ξ) soit un ensemble U. Ainsi que nous l'avons vu plus haut, il ne suffit pas de montrer — ce qui est facile — que le coefficient de Fourier-Stieltjes c_n de (2) ne tend pas vers zéro quand $\xi = \frac{1}{\theta}$, $\theta \in C$ pour en conclure que E (ξ) est un ensemble U.

La solution du problème a été rendue possible par la découverte, par Piatecki-Shapiro, d'un nouveau type d'ensemble d'unicité, les ensembles du type $H^{(n)}$ qui ne se réduisent pas aux ensembles H ou à leur union. Considérons le cas de $n = 2$, qui est typique.

Nous dirons qu'une suite de vecteurs V de coordonnées entières p_k, q_k dans l'espace euclidien R^2 est normale si quels que soient les entiers fixes a, b l'expression $|ap_k + bq_k|$ croît indéfiniment avec k.

Ceci dit, considérons un ensemble E contenu pour fixer les idées dans (0, 1). Soit $x \in E$ et considérons le point P de coordonnées $p_k x$, $q_k x$ réduites modulo 1, c'est-à-dire prises sur le tore unité dans R^2. Si quel que soit $x \in E$, et quel que soit k le point P_k n'appartient jamais à un certain ensemble G ouvert du tore, on dit que E est du type $H^{(2)}$. L'analogie avec les ensembles du type H est évidente, et la généralisation à l'espace euclidien R^n est immédiate, fournissant des ensembles du type $H^{(n)}$.

Grâce au théorème de Piatecki-Shapiro, d'après lequel tout ensemble du type $H^{(n)}$ est un ensemble U, on peut démontrer que l'ensemble cantorien E (ξ) à rapport constant ξ où $\xi = 1/\theta$, $\theta \in C$ est un ensemble U. On démontre, en effet, que si θ est de degré n, E (ξ) est de type $H^{(n)}$ précisément. Le vecteur « normal » V_k qu'on considère ici a pour coordonnées les entiers

$$a_{k+1}\,,\quad a_{k+2}\,,\ \cdots\ a_{k+n}$$

où $a_s = \theta^s + \varepsilon_s$ et $\varepsilon_s \to 0$ et le fait qu'il est normal se démontre en remarquant que quels que soient les entiers $c_1 \dots c_n$ on a toujours

$$c_1 + c_2 \theta + \cdots + c_n \theta^{n-1} \neq 0$$

puisque θ est de degré n. C'est ainsi que s'établit la relation entre le type de l'ensemble et le degré de l'entier algérbique θ.

BIBLIOGRAPHIE

Sur la théorie générale, consulter:

A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, Warszawa-Lewow, 1953, mais plus spécialement la nouvelle édition de cet ouvrage, qui est sur le point de paraître en Angleterre, Cambridge University Press.

Sur les ensembles U et M, on consultera:

N. Bari, *The uniqueness problem*, Translation No. 52 of the American Mathematical Society (translated from *Uspechi Mat. Nauk* (1949)).

Mémoires originaux.

D. E. Menchoff, Sur l'unicité du développement trigonométrique. *Comptes rendus Ac. Sc. Paris*, vol. 163 (1916), pp. 433-436.

A. Rajchman, Sur l'unicité du développement trigonométrique. *Fundamenta Mathematica*, 3 (1922), pp. 286-302.

N. K. Bari, Sur le rôle des lois diophantiques dans le problème de l'unicité du développement trigonométrique. *Rec. Math. de Moscou N. S.*, 2 (44) (1937), pp. 99-724.

R. Salem, Sets of uniqueness and sets of multiplicity. *Trans. Am. Math. Soc.*, 54 (1943), pp. 218-228 et 56 (1944), pp. 32-49.

—— Rectification to the papers « Sets of uniqueness and sets of multiplicity ». *Trans. Am. Math. Soc.*, 63 (1948), pp. 595-598.

Piatecki-Shapiro, *Uspekhi Mat. Nauk*, 8 (1953), pp. 167-170 et *Ucenye Zapiski Mosc.* (1954).

R. Salem et A. Zygmund, Sur un théorème de Piatecki-Shapiro. *Comptes rendus*, 240 (1955), pp. 2040-2042.

—— et A. Zygmund, Sur les ensembles parfaits dissymétriques à rapport constant. *Comptes rendus*, 240 (1955), pp. 2281-2283.

Sur les nombres de la classe C, on consultera:

C. Pisot, La répartition modulo 1 et les nombres algébriques. *Annali di Pisa*, 7 (1938), pp. 205-248.

R. Salem, A remarkable class of algebraic integers. *Duke Math. Journ.*, 11 (1944), pp. 103-108.

J. W. S. Cassels, Diophantine Approximation. *Cambridge tracts No. 45* (Camb. Univ. Press, 1957).