

Réunion de Glaris, 14 septembre 1958.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

qui ne présente pas de difficultés. En dimension supérieure, par contre, on se trouve devant un problème local très difficile, qui a été résolu par Grauert et Remmert (à paraître prochainement aux *Math. Annalen*). Dans le cas des surfaces (théorème d'Enriques), on peut donner une démonstration directe, à la Jung.

La partie ii) résulte des relations connues entre géométrie « analytique » et géométrie « algébrique ».

En géométrie algébrique sur un corps de base de caractéristique p on ne dispose plus du groupe fondamental π_1 . Le théorème précédent suggère de le remplacer par la considération des revêtements algébriques $f: V' \rightarrow V$. On connaît assez bien les propriétés des revêtements *abéliens* et, dans certains cas, on peut montrer qu'il n'en existe pas d'autres (c'est ce qui se passe, d'après Abhyankar, si V est le plan projectif, et D une courbe n'ayant que des points doubles à tangentes distinctes). En dehors du cas abélien (ou, à la rigueur, résoluble), on ne sait rien; par exemple, on ne connaît pas les revêtements d'une droite ramifiés en trois points.

Réunion de Glaris, 14 septembre 1958.

La Société mathématique suisse a tenu sa 47^e assemblée annuelle à Glaris le 14 septembre 1958, en même temps que la 138^e session de la Société helvétique des Sciences naturelles, sous la présidence de M. le professeur G. Vincent, président de la Société.

Au cours de la *séance administrative*, l'ordre du jour statutaire a été liquidé; rien d'important n'est à signaler.

Les six communications suivantes ont fait l'objet de la *partie scientifique*.

Résumé des communications.

1. J. RIGUET (Adliswil): *Graphes catégoriques et structures locales.*
(Résumé non parvenu.)
2. M^{lle} S. PICCARD (Neuchâtel): *Les groupes abéliens associés à certains groupes.*

I. Soit G un groupe multiplicatif non libre défini par un ensemble E d'éléments générateurs et une famille F de relations fondamentales qui les lient. Supposons qu'il existe un entier $n \geq 2$ et un sous-ensemble E^* de E , dont chaque élément figure au premier membre de l'une au moins des relations $f = 1$ de la famille F , tel que le premier membre f de toute relation $f = 1$ de la famille F est de degré congru à 0 modulo n par rapport à l'ensemble (par rapport à chacun) des éléments de E^* qui figurent dans l'expression de f . Nous disons que le groupe G jouit de la propriété $P \pmod{n}$ par rapport à l'ensemble (par rapport à chacun) des éléments de l'ensemble E^* . On peut alors associer au groupe G un groupe abélien dont les éléments sont des

classes d'éléments de G et ce groupe abélien fournit des renseignements sur la structure du groupe G .

Supposons, pour fixer les idées, que G est fini d'ordre N . Soit $E = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ et soit $E^* = \{a_{s_1}, \dots, a_{s_t}\}$, $1 \leq t \leq k$.

Si le groupe G jouit de la propriété $P \pmod{n}$ par rapport à l'ensemble des éléments de E^* , on peut répartir les éléments de G en n classes A_0, A_1, \dots, A_{n-1} comme suit. Soit a un élément quelconque de G . Il s'obtient par composition finie des éléments de E . Soit $a = g(a_1, \dots, a_k)$ et soit u le degré de g par rapport à l'ensemble des éléments de E^* . Nous dirons que l'élément a fait partie de la classe A_i si $i \equiv u \pmod{n}$, quel que soit $i = 0, 1, \dots, n-1$. La classe A_i n'est pas vide, elle contient en tout cas les i -mes puissances des éléments de E^* . Tout élément de G fait partie d'une classe A et d'une seule et G est la réunion des classes A . Toute classe a contient, avec tout élément a de G , la classe entière des éléments de G conjugués à a . Appelons produit de deux classes A_i, A_j l'ensemble des éléments de G qui peuvent se mettre sous la forme ab , $a \in A_i, b \in A_j$. Cette loi de composition est commutative et on a $A_i A_j = A_h$ où h est le nombre de la suite $0, 1, \dots, n-1$ congru à $i + j$ modulo n . Toutes les classes A_i sont formées d'un même nombre d'éléments et la classe A_0 joue le rôle d'élément neutre du groupe abélien formé des classes A_j et qui est associé au groupe G . L'ordre de chacun des éléments de E^* ainsi que l'ordre N du groupe G sont des multiples de n et la classe A_0 est un sous-groupe invariant d'ordre N/n de G .

Supposons maintenant que $E^* = E$, que E est fini et que le groupe G jouit de la propriété $P \pmod{n}$ par rapport à chaque élément de l'ensemble $E = \{a_1, \dots, a_k\}$. On peut alors décomposer l'ensemble des éléments de G en n^k classes d'équivalence comme suit.

Soient i_1, i_2, \dots, i_k k entiers dont chacun est compris entre 0 et $n-1$ et soit a un élément quelconque de G . a peut être obtenu par composition finie des éléments de E . Soit $a = \varphi(a_1, a_2, \dots, a_k)$. Nous disons que a est de classe $M_{i_1 \dots i_k}$ si φ est de degré $\equiv i_u \pmod{n}$ par rapport à a_u , quel que soit $u = 1, 2, \dots, k$. Nous appelons produit de deux classes $M_{i_1 i_2 \dots i_k}$ et $M_{j_1 j_2 \dots j_k}$ l'ensemble des éléments de G de la forme ab , $a \in M_{i_1 i_2 \dots i_k}, b \in M_{j_1 j_2 \dots j_k}$. Ce produit est à son tour une classe $M_{l_1 l_2 \dots l_k}$, telle que $l_u \equiv i_u + j_u \pmod{n}$ quel que soit $u = 1, 2, \dots, k$. Avec cette loi de multiplication qui est commutative, les classes M forment un groupe abélien Γ associé au groupe G . Toute classe M contient, avec chaque élément a de G la classe entière des éléments de G conjugués à a . Le groupe G ne saurait être engendré par moins de k éléments, autrement dit le système générateur E est minimum. Si le groupe G jouit de la propriété $P \pmod{n}$ par rapport à chaque élément d'un de ses systèmes générateurs, il jouit de la même propriété par rapport à chacun de ses systèmes générateurs minima et les classes M définies ci-dessus ont un caractère intrinsèque.

On retrouve les mêmes classes d'éléments de G à partir de tout système minimum d'éléments générateurs de G . Quel que soit le sous-groupe γ du groupe Γ , la réunion des éléments de G faisant partie des classes M qui constituent les éléments du groupe γ est un sous-groupe invariant de G . Le nombre des sous-groupes invariants de G est donc non inférieur au nombre total des sous-groupes du groupe Γ , nombre qu'il est aisé de déterminer et qui fournit une borne inférieure au nombre total des sous-groupes invariants de G . Si le groupe G est d'ordre fini N , chaque classe M comprend N/n^k éléments. N est un multiple de n^k . L'ordre ν de toute classe $M_{i_1 i_2 \dots i_k}$ considérée comme élément de Γ est égal à n/d , où d est le plus grand commun diviseur des nombres n, i_1, \dots, i_k . Le groupe Γ est à base minimum d'ordre k . Soit l un entier ($1 \leq l \leq k$) et soient $M_{i_1^j \dots i_k^j}$ ($j = 1, 2, \dots, l$) l classes M . Nous disons que ces classes sont *indépendantes* si $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ désignant des entiers, l'égalité (1) $(M_{i_1^1 \dots i_k^1})^{\alpha_1} \dots (M_{i_1^l \dots i_k^l})^{\alpha_l} = M_0 \dots 0$ implique que $\alpha_i \equiv 0 \pmod{n}$, $i = 1, \dots, l$, et nous disons qu'elles sont liées ou dépendantes dans le cas contraire. La condition nécessaire et suffisante pour que l classes $M_{i_1^j \dots i_k^j}$ ($j = 1, \dots, l$) soient dépendantes c'est que le p.g.c.d. de tous les déterminants d'ordre l que l'on peut déduire de la matrice

$$\begin{pmatrix} i_1^1 & \dots & i_1^l \\ \vdots & \dots & \vdots \\ i_k^1 & \dots & i_k^l \end{pmatrix}$$

en prenant les éléments communs à ses l colonnes et à l lignes quelconques soit supérieur à un. La condition nécessaire et suffisante pour que k classes de Γ constituent une base de ce groupe c'est qu'elles soient indépendantes. Il est possible d'indiquer une borne supérieure au nombre total des systèmes générateurs minima (bases) de G . Ce nombre est $\leq (N/p_1^k)^k (p_1^k - 1) \dots (p_1^k - p_1^{k-1})/n!$, où p_1 est le plus petit diviseur premier de n . Quel que soit le sous-groupe g de G et quelles que soient les classes distinctes $M_{i_1 \dots i_k}, M_{j_1 \dots j_k}$ qui contiennent des éléments de g , chacune de ces deux classes M contient le même nombre d'éléments de g .

Tout groupe abélien G d'ordre fini jouit de la propriété $P \pmod{\alpha_1}$ par rapport à tout élément de chacun de ses systèmes générateurs minima, α_1 désignant le plus petit des invariants du groupe G . Mais les groupes abéliens ne sont pas les seuls à jouir de cette propriété et il existe, pour tout entier $n \geq 2$, des groupes non abéliens à un nombre fini d'éléments générateurs et qui jouissent de la propriété $P \pmod{n}$ par rapport à chaque élément de tout système générateur minimum.

On a, entre autres, le théorème d'existence suivant:

Quel que soit l'entier $n \geq 2$, il existe un groupe *non abélien* de transformations des entiers positifs (d'ordre infini), défini par deux éléments générateurs a et b liés par les seules relations

fondamentales $a^n = 1$ et $b^n = 1$. Un tel groupe jouit de la propriété P (mod n) par rapport à chacun de ses deux éléments générateurs a et b .

Tel est, par exemple, le groupe G engendré par les deux transformations a et b suivantes, où nous posons pour abrégé

$$l_1 = n, \quad l_k = l_{k-1} + n(n-1)^{k-1}, \quad k = 2, 3, 4, \dots,$$

a comprend le cycle $(1, 2, \dots, n)$ ainsi que l'ensemble des cycles $(l_{2i-1} + 1, l_{2i} + 1, l_{2i} + 2, \dots, l_{2i} + n - 1)$, $(l_{2i-1} + 2, l_{2i} + n, \dots, l_{2i} + 2(n-1))$, \dots , $(l_{2i}, l_{2i+1} - n + 2, l_{2i+1} - n + 3, \dots, l_{2i+1})$, $i = 1, 2, 3, \dots$, et b se compose des cycles $(1, l_1 + 1, l_1 + 2, \dots, l_1 + n - 1)$, $(2, l_1 + n, \dots, l_1 + 2(n-1))$, \dots , $(l_1, l_2 - n + 2, l_2 - n + 3, \dots, l_2)$ ainsi que des cycles $(l_{2i} + 1, l_{2i+1} + 1)$, \dots , $(l_{2i+1} + n - 1, l_{2i} + 2, l_{2i+1} + n, \dots, l_{2i+1} + 2(n-1))$, \dots , $(l_{2i+1}, l_{2i+2} - n + 2, l_{2i+2} - n + 3, \dots, l_{2i+2})$, $i = 1, 2, 3, \dots$

Toutes les transformations a^{i_1} , $b^{j_1} a^{i_1}$, $a^{i_2} b^{j_1} a^{i_1}$, $b^{j_2} a^{i_1} b^{j_1} a^{i_1}$, \dots , où $i_1 = 1, \dots, n$, $j_1, i_2, j_2, \dots = 1, 2, \dots, n-1$, sont, en effet, distincts et $ab \neq ba$.

II. Supposons maintenant que G est un groupe multiplicatif libre ayant un nombre fini d'éléments générateurs a_1, a_2, \dots, a_k liés seulement par des relations triviales découlant des axiomes de groupe p. ex. les relations $a_i^m a_i^{-m} = 1$, $i = 1, 2, \dots, k$, $m = 1, 2, \dots$. Un tel groupe, pour autant qu'il n'est pas cyclique, possède une infinité de systèmes générateurs formés de k éléments qui ne sont liés que par des relations triviales, systèmes que nous appelons *bases* de G. Soit $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ une base quelconque de G et soit n un entier ≥ 2 quelconque. Nous allons répartir les éléments de G en n_k classes $M_{i_1 i_2 \dots i_k}$ ($i_1, i_2, \dots, i_k = 0, 1, \dots, n-1$) comme suit. Soit a un élément quelconque du groupe G. Il peut être obtenu par composition finie des éléments de la base A et cette composition, par l'utilisation éventuelle de relations triviales peut se mettre sous la forme réduite

$$1) \quad a = a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} \dots a_{i_l}^{j_l},$$

où $l \geq 1$, $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_l}$ sont des éléments pas nécessairement distincts de la base considérée, $l \geq 1$ et, si $l > 1$, $a_{i_m} \neq a_{i_{m+1}}$ quel que soit $m = 1, 2, \dots, l-1$, et où j_1, j_2, \dots, j_l sont des entiers quelconques $\neq 0$ si $l > 1$. D'après les hypothèses faites sur la base d'un groupe libre, a peut se mettre de façon unique sous la forme (1), si $a \neq 1$. Nous dirons que l'élément a fait partie de la classe $M_{i_1 i_2 \dots i_k}$ si le second membre de l'égalité (1) est de degré $\equiv i_u \pmod{n}$, $u = 1, 2, \dots, k$. On répartit ainsi l'ensemble des éléments de G en classes M d'égale puissance et chacune de ces classes M contient, avec chaque élément a de G la classe entière des éléments de G conjugués à a . Ces classes M sont

indépendantes de la base choisie et elles forment un groupe abélien associé à G , avec la loi de composition définie comme pour les classes M des groupes non libres jouissant de la propriété $P \pmod{n}$ par rapport à chaque élément d'un système générateur minimum. Il s'ensuit qu'on peut décomposer d'une infinité de façons différentes le groupe G en classes d'équivalence, qu'on peut lui associer une infinité de groupes abéliens, qu'il possède une infinité de sous-groupes invariants, etc. Des méthodes analogues s'appliquent à tous les groupes libres.

3. J. BURCKHARDT (Zürich): *Zum mittelalterlichen Rechnen in der Schweiz* (mit Lichtbildern) .

Es werden die folgenden drei Funde besprochen:

1. Ein Exemplar des *Bamberger Rechenbuches*, 1483, von Ulrich Wagner aus dem Besitz der Zentralbibliothek Zürich. Neben demjenigen in Zwickau ist dies das zweite bekannt gewordene vollständig erhaltene Stück. Es wird insbesondere auf das Vorkommen sowohl der alten als auch der neuen Formen der Ziffern 4 und 5 sowie auf den Ausdruck „Galei“ für Division hingewiesen.

2. Aus dem Codex 830 der Stiftsbibliothek St. Gallen wird Seite 310 gezeigt. Diese enthält ein bisher nicht bemerktes Einmaleins für die Apices. Dieses ist im Unterschied zu einem ähnlichen aus Clm 14137, fol. 173^r (M. Curtze, *Centralblatt für Bibliothekswesen*, XVI. Jahrg., Leipzig, 1899) völlig fehlerfrei. Die Form der Apices weicht nur unbedeutend von derjenigen in Clm 14137 ab.

3. Aus Cod. Bern 250 wird fol. 1^r gezeigt, worauf sich ein vollständiges Gerbertsches Rechenbrett befindet, das in der Literatur bisher nicht erwähnt wird. Es ist mit „Gerbertus Latio Numeroe Abacique Figuras“ überschrieben und enthält 27 Kolonnen für die Ganzen von 1 bis 10^{27} und rechts anschliessend drei Kolonnen für die Unzen, Scripuli und Calculi. Die erste Zeile enthält die Bezeichnung für die Zehnerpotenzen, I, X, C; \bar{I} , \bar{X} , \bar{C} , \bar{M} \bar{I} , X \bar{M} \bar{I} , C \bar{M} \bar{I} ; u.s.w. je in Triaden. Die zweite Zeile enthält die Darstellung dieser Zahlen als Summen zweier Hälften, z.B. $X = VV$, bzw. als Produkte, z.B. \bar{M} $\bar{I} = X \bar{C}$. Die dritte Zeile endlich enthält die daraus gebildeten Hälften, also z.B. V, bzw. $V \bar{C}$. Zuunterst auf der Tafel befindet sich eine sehr vollständige Münztabelle: Die Unterteilung des As bis zur Unze und von der Unze über die Duella zur Drachme. Ihr folgen die kleineren Teile, u.a. der Obolus und zum Schluss der Calculus. Die Tafel ist vollständiger als diejenige in Cod. Bern. 299, die A. Nagl veröffentlicht hat (*Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien*, phil. hist. Kl. 116 (1888)). Der Kodex wird dem X. Jh. zugeschrieben, die auf Gerbert weisende Ueberschrift, die nicht von einer späteren Hand zu sein scheint, weist auf frühestens Ende X. Jh. (siehe hierzu A. Nagl, S. 917).

Nachträglich bemerke ich, dass bereits K. Käfer, *Der Kettensatz*, Diss. Zürich 1941, auf S. 113 das Exemplar des Bamberger Rechenbuches in der Zürcher Zentralbibliothek erwähnt.

4. A. HAEFLIGER (Genève): *Sur les projections d'un tore dans un plan*, D'après H. Whitney (Cf. *Ann. of Math.*, 62, 1955, pp. 374-410).

toute application différentiable d'une surface S dans un plan peut être approchée par une application «excellente» f ; les points singuliers de f (c'est-à-dire ceux où le rang de f n'est pas maximum) forment une courbe différentiable C que nous appellerons le *contour* de f ; son image $f C$ est le *contour apparent* de f ; il présente des points de rebroussement isolés, images des *cusps*.

Supposons que S soit une surface compacte orientable. Alors suivant R. Thom (Cf. *Ann. Inst. Fourier*, 6, 1955-56, pp. 43-87), le contour C de f est une courbe homologue à zéro dans S et le nombre des cusps est congru à zéro module 2. La propriété suivante met en relation le nombre des cusps avec la position dans S des composantes connexes de C :

Soit f une application excellente d'une surface orientable compacte S dans le plan. Supposons que le contour de f partage S en deux parties exactement S_1 et S_2 . Alors le nombre des points de rebroussement présentés par le contour apparent est au moins égal à la valeur absolue de la différence des caractéristiques d'Euler-Poincaré de S_1 et S_2 .

Par exemple, si dans une projection d'un tore dans le plan le contour apparent est connexe, il présentera au moins deux points de rebroussement.

5. A. PFLUGER (Zürich): *Eine Bemerkung zur Theorie der quasikonformen Abbildungen*.

Die Abbildung f eines Gebietes D der z -Ebene in die w -Ebene (eine komplexwertige Funktion $f(z)$ auf D) heisst K -quasikonform ($K \geq 1$), wenn sie in D im Sinne von Tonelli absolut stetig ist, lokal quadratisch integrierbare Ableitungen besitzt und fast überall einer Differentialgleichung $f_z = \mu(z) \cdot f_{\bar{z}}$ genügt, wo $\mu(z)$ komplexwertig, messbar und $|\mu(z)| \leq \frac{K-1}{K+1}$ ist. Sie ist eine innere Abbildung und zwar die Zusammensetzung eines K -quasikonformen Homöomorphismus von D in ein Gebiet Δ der ζ -Ebene mit einer in Δ analytischen Funktion $h(\zeta)$. Bekannt ist der folgende Satz über analytische Fortsetzung (PAINLEVÉ, *Annales de Toulouse*, t. 2 (1888), p. 28): Wird ein Gebiet D (der z -Ebene) durch einen rektifizierbaren Jordanbogen C in die beiden Teilgebiete D_1 und D_2 zerlegt und ist eine auf D stetige Funktion in D_1 und in D_2 analytisch, so ist sie im ganzen Gebiet D analytisch. Ob ein richtiger Satz entsteht, wenn man in dem PAIN-

LEVÉ'schen Satz das Wort analytisch durch quasikonform ersetzt, ist m.W. eine nicht gelöste Frage (vgl. A. MORI, On Quasiconformality and Pseudoanalyticity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 68 (1957), p. 74. Hier wird gezeigt, dass der betreffende Satz richtig ist, wenn die Bildmenge von C keine innern Punkte enthält.)

Das Problem könnte jedoch auf den analytischen Fall ($\mu = 0$) reduziert werden, wenn man wüsste, dass die Rektifizierbarkeit von Kurvenbogen gegenüber quasikonformen Homöomorphismen invariant wäre. Dies ist aber nicht der Fall. Es gilt nämlich der Satz: Zu jedem $K > 1$ existiert ein K -quasikonformer Homöomorphismus der Ebene auf sich, der eine Kreislinie auf eine nicht-rektifizierbare Jordankurve abbildet. Die quasikonformen Abbildungen, die vieles mit den konformen und den analytischen Abbildungen gemeinsam haben, können also in anderer Hinsicht sehr stark davon abweichen. Sein Beweis ergibt sich durch Kombination der folgenden drei Sätze:

- 1) Zu jedem $K > 1$ existiert ein K -quasikonformer Homöomorphismus der Kreisscheibe auf sich, wo die induzierte topologische Abbildung der Kreisperipherie nicht absolut stetig ist (A. BEURLING and L. V. AHLFORS, The boundary-correspondence under quasiconformal mappings. *Acta math.*, vol. 96 (1956), pp. 125-142);
- 2) Ist die komplexwertige Funktion $\mu(z)$ in der ganzen z -Ebene messbar und ist $|\mu(z)| \leq \frac{K-1}{K+1}$ für alle z , so existiert ein K -quasikonformer Homöomorphismus $\zeta(z)$ der z -Ebene auf sich mit $\zeta_z = \mu(z) \zeta_z$ fast überall (Ch. B. MORREY, On the solution of quasilinear elliptic partial equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 43 (1938), pp. 126-166);
- 3) Wird der Einheitskreis auf ein Gebiet abgebildet, das von einer rektifizierbaren Jordankurve berandet ist, so ist die Abbildungsfunktion auf der Kreisperipherie eine absolute stetige Funktion des Winkelargumentes (F. und M. RIESZ, Ueber Randwerte einer analytischen Funktion. *IV^e Congrès des Math. scandinaves*, 1916, pp. 27-44).

6. H. HUBER (Bâle): *Eine Anwendung der Funktionentheorie auf geometrische Probleme.*

(Résumé non parvenu.)