

4. The Functions $\Psi_{2k-1}(t)$, $X_{2k-1}(t)$, $\Phi_{2k-1}(t)$ as Double Sums.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

which is equivalent to a known recurrence for the BERNOULLI numbers [8].

4. THE FUNCTIONS $\Psi_{2k-1}(t)$, $X_{2k-1}(t)$, $\Phi_{2k-1}(t)$ AS DOUBLE SUMS.

The results which are stated as (4), (5), (6) follow readily from (1) and (2) which are known to be equivalent (see [1], [2]). It is to be observed first that a comparison of (4) and (5) with (1) taking into account (27) gives the relations:

$$(30) \quad \Psi_{2k-1}(t) = h_{2k-1}(t/2) - h_{2k-1}(t) = V_k(\alpha_{2k-1}(t/2) - \alpha_{2k-1}(t)),$$

$$(31) \quad X_{2k-1}(t) = 2^{2k} h_{2k-1}(2t) - h_{2k-1}(t) = V_k(2^{2k} \alpha_{2k-1}(2t) - \alpha_{2k-1}(t)).$$

From (4) and (6) we also have,

$$(32) \quad \Phi_{2k-1}(t) = 2^{2k} \Psi_{2k-1}(2t) - \Psi_{2k-1}(t).$$

By (30), we may write

$$(33) \quad \Phi_{2k-1}(t) = -V_k(\alpha_{2k-1}(t/2) - (2^{2k} + 1)\alpha_{2k-1}(t) + 2^{2k}\alpha_{2k-1}(2t)).$$

Thus, our functions (4), (5), (6) are expressed in terms of $\alpha_{2k-1}(u)$. These relations in conjunction with (1) and (2) identify them with $(4)_1$, $(5)_1$, and $(6)_1$ respectively.

It is of interest to note that (31) with $k = 2$ permits, with the aid of a result of VAN DER POL [1], the deduction of Jacobi's famous theorem on the number of representations $r_8(n)$ of the integer n as the sum of eight squares. Thus,

$$(34) \quad 240 X_3(t) = 16 \alpha_3(2t) - \alpha_3(t) = 15 \theta_0^8(0, q)$$

where $q = \exp(-t)$. Hence,

$$\theta_0^8(0, q) = 16 X_3(t) = 1 + 16 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \zeta_3(n),$$

and

$$\theta_3^8(0, q) = 1 + 16 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^n \zeta_3(n).$$

This result implies that

$$(35) \quad r_3(n) = 16 (-1)^n \zeta_3(n) = 16 (-1)^{n-1} (\sigma_3^0(n) - \sigma_3^e(n)) ,$$

where $\sigma_3^0(n)$ denotes the sum of the third powers of the odd divisors of n , and $\sigma_3^e(n)$ denotes the sum of the third powers of the even divisors of n . This is the desired result. [8]

5. MODULAR TRANSFORMS.

It has been shown in [2] that for $k > 1$, the function $\alpha_{2k-1}(t)$ satisfies the modular transformation

$$(36) \quad t^k \alpha_{2k-1}(2\pi t) = \frac{(-1)^k}{t^k} \alpha_{2k-1}(2\pi/t) .$$

For $k = 1$, the conditional convergence of the double series in (1) creates difficulties [9], which however, have been resolved by HURWITZ [3], who gives a result equivalent, in our notation, to the formula

$$(37) \quad t \alpha_1(2\pi t) = -\frac{1}{t} \alpha_1(2\pi/t) + \frac{6}{\pi} .$$

We find that this result may be proved very easily by using (36) in conjunction with the relation

$$(38) \quad \alpha_5(t) = \alpha_3'(t) + \alpha_1(t) \alpha_3(t) ,$$

which is the case $n = 2$ in (26).

With the aid of equations (30), (31) and (33), the transforms (36) and (37) yield those for our functions $(4)_1$, $(5)_1$ and $(6)_1$. It is found that under the modular transformation in question, the first two functions are reciprocal in the sense that,

$$(39) \quad t^k \Psi_{2k-1}(2\pi t) = \frac{(-1)^k}{t^k} \chi_{2k-1}(2\pi/t) , \quad k \geq 1 .$$

The remaining function (6), transforms in a manner analogous to $\alpha_{2k-1}(t)$, namely

$$(40) \quad t^k \Phi_{2k-1}(2\pi t) = \frac{(-1)^k}{t^k} \Phi_{2k-1}(2\pi/t) , \quad k > 1 ,$$