Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 4 (1958)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PRINCIPE DE FERMAT
Kapitel: 2. Inductions électromagnétiques et équations de MAXWELL.
Autor: Quan, Pham Mau
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34626

distribution énergétique est faite par le tenseur d'impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$, suivant des schémas de type hydrodynamique. On dit qu'un domaine D_4 de l'espace-temps est occupé par une distribution énergétique schématisée sous forme de *fluide*, si sur le domaine D_4 sont définis

1) un champ de scalaire ρ dit *densité propre* du fluide,

2) un champ de vecteur unitaire orienté dans le temps $\vec{u}$ dit *vecteur vitesse unitaire* dont les trajectoires sont appelées les lignes de courant du fluide.

On appellera *repère propre* en un point x du domaine D_4 un repère orthonormé dont le premier vecteur orienté dans le temps coïncide avec le vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$ et dont les trois autres vecteurs orientés dans l'espace définissent le tri-plan π_x orthogonal à $\vec{u}$ qu'on appelle *espace associé* à la direction de temps $\vec{u}$.

Le repère propre précédent joue le rôle d'un repère galiléen local par rapport auquel la matière est au repos. Il suffit d'écrire, dans ce repère, les équations relatives à la matière au repos. Puis, par un changement de repère, on en déduit l'expression générale invariante des équations relativement au repère naturel associé à un système de coordonnées locales quelconque. Inversement, l'interprétation physique des équations se fait relativement au repère propre dans l'espace tangent au point considéré. On peut aussi considérer un espace-temps de la relativité restreinte rapporté à un système de coordonnées galiléennes réduites dans lequel la métrique a pour expression

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

où $x^0 = ct$, c désignant la vitesse de propagation de la lumière dans le vide.

2. Inductions électromagnétiques et équations de MAXWELL.

La théorie de Maxwell pour la matière fait intervenir un champ électromagnétique variable avec le temps, défini par quatre vecteurs d'espace: champ électrique $\vec{E}$ et induction magnétique $\vec{B}$, champ magnétique $\vec{H}$ et induction électrique D. Le champ électromagnétique ainsi défini est régi par les équations de MAXWELL qui peuvent s'écrire dans un système d'unités convenables, relativement à un repère lié à la matière au point considéré

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \\ &\operatorname{div}\vec{B} = 0 \end{aligned}\right. \tag{2 1}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{\Gamma} \\ &\operatorname{div}\vec{D} = \delta\,. \end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

Ces équations établissent le lien entre les champs et inductions $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$ d'une part et la densité de charge δ et le courant de conduction $\vec{\Gamma}$ d'autre part. Ces diverses quantités sont de plus liées par les relations

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \tag{2.3}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{2.4}$$

$$\vec{\Gamma} = \sigma\vec{E} \tag{2.5}$$

où ε, μ, σ représentent respectivement le pouvoir diélectrique, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique du milieu considéré. Le milieu est dit *isotrope* si ε, μ, σ sont des scalaires. C'est ce que nous supposerons dans la suite.

La représentation vectorielle précédente n'est bien adaptée qu'à l'étude des transformations consistant en un déplacement purement spatial et un changement d'origine pour le temps. Pour avoir une représentation tensorielle indépendante du mode de repérage dans la variété espace-temps V_4, on peut généraliser les équations de MAXWELL de la manière suivante.

Considérons un domaine D_4 de l'espace-temps V_4 occupé par un milieu matériel chargé et conducteur, siège des phénomènes électromagnétiques. Soit x un point de D_4 et R le repère propre associé. En admettant que les équations rigoureuses du champ électromagnétique se réduisent localement dans le repère propre R aux équations classiques (2. 1), (2. 2) nous sommes amenés à introduire deux tenseurs antisymétriques d'ordre 2, $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$, dont les composantes relatives au repère propre sont

$$(H_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -D_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -D_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

et vérifient les relations

$$G_{0i} = \varepsilon H_{0i} \qquad \mu G_{ij} = H_{ij} . \tag{2.6}$$

Sur ces formules et dans la suite, les indices latins prennent les valeurs 1, 2, 3 tandis que les indices grecs prennent les valeurs 0, 1, 2, 3.

Nous introduisons les tenseurs adjoints $\overset{*}{G}_{\alpha\beta}$ et $\overset{*}{H}_{\alpha\beta}$ définis par

$$\overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} H_{\gamma\delta} \qquad \overset{*}{G}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} G_{\gamma\delta} \tag{2.7}$$

où $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le tenseur complètement antisymétrique attaché à la forme élément de volume de V_4. Les relations (2. 6) peuvent alors s'écrire sous la forme invariante

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} u^\alpha &= \varepsilon H_{\alpha\beta} u^\alpha \\ \mu \overset{*}{G}_{\alpha\beta} u^\alpha &= \overset{*}{H}_{\alpha\beta} u^\alpha . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ces relations sont appelées les *équations de liaison*. Elles montrent que les deux champs de tenseurs $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ ne sont pas indépendants l'un de l'autre. On peut exprimer les $G_{\alpha\beta}$ en fonction des $H_{\alpha\beta}$. Un calcul donne

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\alpha\beta} + \frac{1 - \varepsilon\mu}{\mu} \left(H_{\sigma\alpha} u^\sigma u_\beta - H_{\sigma\beta} u^\sigma u_\alpha \right) . \tag{2.9}$$

Cela posé, le champ électromagnétique doit satisfaire aux équations de MAXWELL qui s'écrivent dans la variété espace-temps

$$\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\alpha H_{\beta\gamma} = 0 \tag{2.10}$$

$$\nabla_\alpha G^\alpha{}_\beta = J_\beta \tag{2.11}$$

où J_β est le vecteur courant électrique généralisé. En tenant compte des valeurs des composantes de $\vec{J}$ dans le repère propre, on est conduit à faire l'hypothèse

$$J_\beta = \delta u_\beta + \sigma u^\alpha H_{\alpha\beta} . \tag{2.12}$$

Le vecteur $\vec{J}$ possède ainsi une composante $\delta\vec{u}$ colinéaire à $\vec{u}$ et une composante $\Gamma_\alpha = u^\rho H_{\rho\alpha}$ orthogonale à $\vec{u}$. La première représente le courant de convection et la seconde, le courant de conduction. δ sera appelé *densité propre de charge électrique*.

Les équations (2. 10) peuvent encore s'écrire

$$\nabla_\alpha H_{\beta\gamma} + \nabla_\beta H_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma H_{\alpha\beta} = 0 .$$

Elles expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe localement un vecteur φ_α tel que $H_{\alpha\beta}$ soit son rotationnel

$$H_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi_\beta - \partial_\beta \varphi_\alpha .$$

Enfin, on démontre que les vecteurs

$$\mathcal{E}^\delta = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\nabla_\alpha H_{\beta\gamma} \qquad \mathcal{D}_\beta = \nabla_\alpha G^\alpha{}_\beta \tag{2.13}$$

qui figurent aux premiers membres des équations (2. 10), (2. 11) vérifient les identités

$$\nabla_\alpha \mathcal{E}^\alpha = 0 \qquad \nabla_\alpha \mathcal{D}^\alpha = 0 \tag{2.14}$$

dites conditions de conservation relatives aux équations de MAXWELL. Elles entraînent la conservation du courant électrique

$$\nabla_\alpha J^\alpha \equiv \nabla_\alpha \left(\delta u^\alpha + \sigma u_\rho H^{\rho\alpha}\right) = 0 . \tag{2.15}$$

3. L'intégration des équations de MAXWELL.

En relativité générale, les équations de l'électromagnétisme sont constituées par l'ensemble des équations de MAXWELL et des équations d'EINSTEIN auquel s'ajoutent les conditions de