II. Etude des caractéristiques DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Compte tenu des équations (3. 13), (3. 14), (3. 15), les identités précédentes se réduisent aux équations

$$g^{00}\,\partial_0\, Q^0{}_\alpha = A^{i\beta}{}_\alpha\,\partial_i\, Q^0{}_\beta + B^\beta{}_\alpha\, Q^0{}_\beta$$

$$\partial_0\, P^0 = C^i\,\partial_i\, P^0 + \left(\partial_i\, C^i - \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}\, C^\beta\right) P^0$$

$$\partial_0\, \mathcal{E}^0 = -\,\Gamma^\alpha_{\alpha 0}\, \mathcal{E}^0$$

où les $A^{i\beta}{}_\alpha$, $B^\beta{}_\alpha$, C^α sont des fonctions continues. Ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux inconnues $Q^0{}_\alpha$, P^0, $\mathcal{E}^0$. Comme $Q^0{}_\alpha = P^0 = \mathcal{E}^0 = 0$ sur S, elles n'admettent pas d'autre solution que la solution identiquement nulle. Il en résulte que si les équations (3. 10), (3. 11), (3. 12) sont vérifiées sur S par les données de Cauchy $\mathcal{C}$, elles sont également vérifiées dans tout le domaine d'espace-temps considéré par la solution des équations du champ.

Le problème de l'intégration des équations du champ consiste finalement dans le choix des données de Cauchy $\mathcal{C}$ rendant compatibles les équations (3. 10), (3. 11), (3. 12) qui permettent de calculer u^α, p, δ, puis dans l'intégration du système des équations (3. 13), (3. 14), (3. 15) et (3. 6), (3. 7), (3. 8), (3. 9) qui permettent d'étudier l'évolution des champs $\mathcal{G}$ ($g_{\alpha\beta}$, $H_{\alpha\beta}$, θ, u^α, p, δ).

II. Etude des caractéristiques des équations de Maxwell

4. Les variétés caractéristiques des équations de MAXWELL.

Dans l'analyse du problème de Cauchy, on met en évidence quatre sortes de variétés exceptionnelles:

1) les variétés $g^{00} = 0$ tangentes aux cônes élémentaires,

2) les variétés qui généralisent les fronts d'ondes hydrodynamiques,

3) les variétés engendrées par les lignes de courant,

4) les variétés $g^{00} - (1 - \varepsilon\mu)\, u^0\, u^0 = 0$ que nous allons étudier.

Sur les équations (3. 15), on voit que si l'hypersurface S portant les données de Cauchy est telle que sur S

$$g^{00} - (1 - \varepsilon\,\mu)\,u^0\,u^0 = 0$$

les dérivées $\partial_0 \mathrm{H}_{0i}$ du champ électromagnétique peuvent être discontinues à la traversée de S. Il peut exister une infinité de solutions distinctes des équations de MAXWELL correspondant aux mêmes données de Cauchy. La variété S est une variété caractéristique pour les équations de MAXWELL. Une telle variété sera désignée par V_3^M.

Dans un système de coordonnées locales arbitraire quelconque, les variétés caractéristiques V_3^M définies par $f\,(x^\alpha) = 0$, sont les variétés satisfaisant à l'équation

$$(g^{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon\,\mu)\,u^\alpha\,u^\beta)\,\partial_\alpha f\,\partial_\beta f = 0\ . \tag{4.1}$$

Ces variétés à la traversée desquelles peuvent se produire des discontinuités des dérivées du champ électromagnétique, constituent l'extension relativiste des fronts d'ondes électromagnétiques classiques. Pour qu'elles aient une signification physique, il faut supposer que les variétés V_3^M soient orientées dans le temps ou à la rigueur tangentes au cône élémentaire $ds^2 = 0$ de V_4. Nous verrons que cette hypothèse est bien en accord avec les exigences de la Physique relativiste. S'il en est ainsi,

$$\Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial_\beta f = (1 - \varepsilon\,\mu)\,\left(u^\alpha\,\partial_\alpha f\right)^2 \leqslant 0\ .$$

On en déduit

$$\varepsilon\,\mu \geqslant 1\ . \tag{4. 2}$$

Ceci posé, la généralisation de l'hypothèse d'Hugoniot permet d'évaluer ce qui constitue ici la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques considérées. Pour cela, considérons deux surfaces d'ondes voisines $(V_3^M)_0$ et $(V_3^M)_\theta$ définies par les équations

$$f\,(x^\alpha) = 0 \qquad f\,(x^\alpha) = \theta$$

et prenons θ pour infiniment petit principal.

La ligne de courant issue du point x de $(V_3^M)_0$ coupe $(V_3^M)_\theta$

en un point défini aux infiniment petits d'ordre supérieur près par $x + \eta \vec{u}$, η étant donné par la relation

$$\eta\, u^\alpha \partial_\alpha f = \theta\ . \tag{4.3}$$

Soit $\vec{n}$ le vecteur normé ($\vec{n}^2 = -1$) normal en x à la surface d'onde $(V_3^M)_0$. Il a pour composantes covariantes en x

$$n_\lambda = \frac{\partial_\lambda f}{\sqrt{-\,g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial_\beta f}}\ . \tag{4.4}$$

La trajectoire orthogonale des V_3^M issue de x coupe $(V_3^M)_\theta$ en un point qui, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, s'écrit $x + \eta_1 \vec{n}$, η_1 étant déterminé par la relation

$$\eta_1\, n^\lambda \partial_\lambda f = \theta\ .$$

On en déduit

$$\eta_1 = \frac{\theta}{n^\lambda \partial_\lambda f} = \frac{\theta\sqrt{-\,g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial_\beta f}}{g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial_\beta f} = \frac{-\,\theta}{\sqrt{-\,g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial_\beta f}}\ . \tag{4.5}$$

Introduisons le vecteur $\vec{t} = \eta\vec{u} - \eta_1\vec{n}$. En vertu de (4. 3) et (4. 4), on a

$$\eta\,(\vec{u}\,.\,\vec{n}) = -\,\eta_1$$

et

$$\vec{t}\,.\,\vec{n} = (\eta\,\vec{u} - \eta_1\,\vec{n})\,.\,\vec{n} = \eta\,(\vec{u}\,.\,\vec{n}) + \eta_1 = 0\ .$$

Le vecteur $\vec{t}$ est donc tangent à la surface d'onde. Il est orienté dans le temps car son carré

$$\eta^2 = (\vec{t})^2 = \eta^2\,\eta_1{}^2 - 2\,\eta\,\eta_1\,(\vec{u}\,.\,\vec{n}) = \eta^2 + \eta_1{}^2$$

est positif.

Le vecteur $\eta\vec{u}$ apparaît ainsi comme la somme de deux vecteurs, l'un orthogonal à la surface d'onde et orienté dans l'espace, l'autre tangent à cette surface et orienté dans le temps. La vitesse de propagation V de l'onde se trouve ainsi définie comme la limite du rapport des modules de ces deux vecteurs, soit

$$V = \lim_{\theta\to 0}\left|\frac{\eta_1}{\eta_0}\right|\ .$$

On a ainsi

$$V^2 = \lim_{\theta \to 0} \frac{\eta_1^2}{\eta_0^2}$$

soit, en remplaçant η_1 et η_0 par leurs valeurs

$$V^2 = \frac{1}{\varepsilon \mu} .$$

La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques est donc égale à $(\varepsilon \mu)^{-\frac{1}{2}}$. Cette valeur appelle deux remarques. D'abord, elle généralise la valeur obtenue en électromagnétisme classique. De plus, dans nos hypothèses $\varepsilon\mu \geqslant 1$, la vitesse de propagation V est inférieure à une vitesse limite $c = 1$; cette valeur coïncide avec la valeur de la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide ($\varepsilon\mu = 1$).

5. Etude des bicaractéristiques.

L'étude des variétés caractéristiques des équations de MAXWELL fait intervenir le champ de tenseur contravariant symétrique

$$\bar{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon \mu)\, u^\alpha u^\beta$$

dont la forme quadratique associée représente la forme caractéristique des équations de MAXWELL. Soit $\bar{g}_{\alpha\beta}$ les coefficients de la forme conjuguée qui a pour expression

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right) u_\alpha u_\beta .$$

Nous introduisons la métrique riemannienne dite *métrique associée*

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta .$$

Elle est de signature hyperbolique normale comme la métrique d'univers comme on peut le vérifier par un calcul direct en repère propre. Nous désignerons dans la suite par $\overline{V}_4$ la variété riemannienne définie par la variété différentiable portant l'espace-temps V_4 et munie de la métrique associée $d\bar{s}^2$. Nous appellerons cône élémentaire associé $\overline{C}_x$ en un point x le cône réel de directions tangentes à $\overline{V}_4$ défini par l'équation $d\overline{s}^2 = 0$.

Dans l'espace riemannien $\overline{V}_4$, les variétés caractéristiques des équations de Maxwell définies localement par $f(x^\alpha) = 0$, sont solutions de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\overline{\Delta}_1 f \equiv \overline{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = 0 . \tag{5.1}$$

Elles sont tangentes en chaque point au cône élémentaire associé $\overline{C}_x$. Les cônes élémentaires $\overline{C}_x$ de $\overline{V}_4$ sont donc cônes caractéristiques pour les équations de Maxwell et celles-ci admettent pour variétés caractéristiques les variétés tangentes à ces cônes.

Une variété caractéristique V_3^M, c'est-à-dire une solution de (5. 1), peut être engendrée au moyen des bandes caractéristiques de (5. 1). Une telle solution peut être engendrée au moyen des bandes de $\overline{V}_4$ constituées par l'ensemble d'une courbe $\overline{L}_0$ et d'une famille à un paramètre de 3-plans élémentaires tangents à ces courbes. Les courbes $\overline{L}_0$ sont appelées les bicaractéristiques des équations de Maxwell.

Pour les déterminer, posons

$$2\,H\left(x^\lambda, y_\mu\right) = \overline{g}^{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta$$

et considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\overline{\Delta}_1 f \equiv 2\,H\left(x^\lambda, \partial_\mu f\right) = C \tag{5.2}$$

où C est une constante arbitraire. Relativement aux variables x^α, f, y_β les bandes caractéristiques des équations de Maxwell sont données par les solutions du système différentiel

$$\frac{dx^0}{\frac{\partial H}{\partial y_0}} = \cdots = \frac{dx^3}{\frac{\partial H}{\partial y_3}} = \frac{df}{2H} = -\frac{dy_0}{\frac{\partial H}{\partial x^0}} = \cdots = -\frac{dy_3}{\frac{\partial H}{\partial x^3}} = du$$

qui satisfont à l'intégrale première

$$2\,H\left(x^\lambda, y_\mu\right) = C$$

pour la valeur C de la constante. Si l'on introduit la variable auxiliaire u, les fonctions $x^\alpha(u)$, $y_\alpha(u)$ sont données par le système canonique

$$\frac{dx^\alpha}{du} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y_\alpha} \qquad \frac{dy_\alpha}{du} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x^\alpha} \tag{5.3}$$

relatif à la fonction hamiltonienne $\mathrm{H}(x^\lambda, y_\mu)$. Le premier groupe des équations (5. 3) s'écrit explicitement

$$\dot{x}^\alpha = \bar{g}^{\alpha\beta} y_\beta \qquad \left(\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du}\right) \cdot \tag{5.4}$$

Inversement

$$y_\beta = \bar{g}_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \cdot \tag{5.5}$$

Cela posé, les solutions $x^\alpha(u)$ de (5. 3) sont extrêmales de la fonction lagrangienne L définie par

$$2\,\mathrm{L} = \bar{g}_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

puisque, par passage des variables $(x^\alpha, \dot{x}^\beta)$ aux variables canoniques (x^α, y_β) qui leur sont liées par (5.4) et (5.5), on a entre H et L la relation classique

$$\mathrm{H} = \dot{x}^\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \mathrm{L}} - \mathrm{L} = \mathrm{L}\,.$$

Ces solutions sont les extrêmales satisfaisant à l'intégrale première

$$2\,\mathrm{L} = \mathrm{C} \tag{5. 6}$$

pour la valeur C de la constante. Or, d'après l'existence de cette intégrale première, les extrêmales ainsi définies sont aussi les extrêmales de

$$\sqrt{2\,\mathrm{L}} = \sqrt{\bar{g}_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}$$

satisfaisant à (5. 6). Il en résulte que les $x^\alpha(u)$ définissent des géodésiques de $\overline{\mathrm{V}}_4$. Si $\mathrm{C} = 0$, le système différentiel aux caractéristiques de (5. 1) admet l'intégrale première $f = $ const. et les variétés V_3^M peuvent être engendrées par les bandes de $\overline{V}_4$ définies par les géodésiques de longueur nulle $\overline{L}_0$, le 3-plan élémentaire associé étant le plan tangent au cône élémentaire $\overline{C}_x$ le long de la tangente à $\overline{L}_0$.

Nous avons démontré le théorème

Théorème. — *Les bicaractéristiques des équations de* Maxwell *sont les géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne* $\overline{V}_4$ *munie de la métrique associée*

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \,.$$

Dans le langage de la théorie de la propagation par ondes, les variétés caractéristiques V_3^M jouent le rôle de surfaces d'ondes électromagnétiques. Les bicaractéristiques $\overline{L}_0$ sont les rayons électromagnétiques associés. En introduisant l'indice de réfraction $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ du milieu, nous pouvons donc énoncer le résultat suivant

Théorème. — *Dans un milieu transparent isotrope d'indice de réfraction* n *variable, les rayons électromagnétiques sont des géodésiques de longueur nulle de l'espace riemannien* $\overline{V}_4$ *muni de la métrique*

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = \left(g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_\alpha\, u_\beta\right) dx^\alpha\, dx^\beta$$

où $g_{\alpha\beta}$ *est le tenseur métrique fondamental et* u_α *le vecteur vitesse unitaire d'univers définis en chaque point du milieu considéré.*

III. Etude géométrique
des rayons électromagnétiques dans l'espace

6. Espace-temps stationnaire et mouvement permanent d'un fluide parfait chargé.

On dit que l'espace-temps V_4 est *stationnaire* dans un domaine D_4 si la variété riemannienne définie par D_4 muni de la métrique d'univers ds^2 admet un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales à trajectoires z orientées dans le temps,