Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1958)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PRINCIPE DE FERMAT

Kapitel: 7. Un problème du calcul des variations

Autor: Quan, Pham Mau

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34626

Considérons maintenant un fluide parfait chargé conducteur en mouvement dans un domaine D_4. Le mouvement de ce fluide est dit *permanent* si l'espace-temps associé V_4 est stationnaire dans D_4 et si le groupe d'isométries laisse invariantes les quantités $(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta}, \theta, q_\alpha, u^\alpha, p, \delta)$. On démontre immédiatement à partir des résultats sur le problème de Cauchy que pour que le mouvement du fluide soit permanent, il faut et il suffit que l'espace-temps riemannien associé soit stationnaire dans D_4 et que son groupe d'isométries laisse invariants les champs $H_{\alpha\beta}$, θ ainsi que les coefficients $\varkappa$, c, l, ε, μ, σ.

Si le mouvement du fluide est permanent, les quantités

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_\alpha\, u_\beta$$

sont constantes le long des lignes de temps. Il en résulte que la variété riemannienne $\overline{V}_4$ définie par la variété différentiable portant D_4 et munie de la métrique associée, admet aussi un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales ne laissant invariant aucun point de $\overline{V}_4$, induit par celui de l'espace-temps. Il est clair que les (x^0, x^i) constituent un système de coordonnées locales adapté pour $\overline{V}_4$. On peut prendre pour générateur infinitésimal du groupe d'isométries de $\overline{V}_4$ le vecteur $\vec{\zeta}$ qui a pour composantes contravariantes $\zeta^\alpha = \xi^\alpha$. Le carré de ce vecteur a pour valeur dans $\overline{V}_4$

$$(\vec{\zeta})^2 = \bar{g}_{00} = g_{00} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)(u_0)^2 .$$

Cette quantité pouvant être positive, négative ou nulle, les trajectoires d'isométries de $\overline{V}_4$ peuvent être orientées dans le temps, dans l'espace ou être isotropes.

7. Un problème du calcul des variations.

Nous nous proposons d'interpréter géométriquement les rayons électromagnétiques dans l'espace à trois dimensions. A cet effet, nous commençons par rappeler brièvement un problème du calcul des variations.

Etant donnée une variété différentiable V_{n+1}, soit $W_{2(n+1)}$ l'espace fibré des vecteurs tangents aux différents points de V_{n+1}. Si l'on adopte sur V_{n+1} des coordonnées locales (x^α) chaque élément de $W_{2(n+1)}$ sera constitué par la réunion des coordonnées (x^α) du point x correspondant de V_{n+1} et des $n+1$ composantes $(\dot{x}^\alpha)$ du vecteur $\dot{x}$ dans le repère naturel en x associé aux (x^α). Une structure de *variété finslérienne sur* V_{n+1} est définie par la donnée d'une fonction $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ à valeurs scalaires dans $W_{2(n+1)}$ telle que pour x fixe, $\mathcal{L}(x, \lambda \dot{x}) = \lambda \mathcal{L}(x, \dot{x})$. En coordonnées locales, une telle fonction est représentée par $\mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^\beta)$ et est homogène et du premier degré par rapport aux $\dot{x}^\beta$.

Considérons une variété différentiable V_{n+1} munie d'une structure de variété finslérienne et supposons qu'elle admette un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales de générateur $\vec{\zeta}$, ne laissant invariant aucun point de V_{n+1} ($\vec{\zeta} \neq 0$). Supposons de plus que les trajectoires z du groupe sont homéomorphes à la droite réelle R, et soit V_n la variété quotient de V_{n+1} par la relation d'équivalence définie par le groupe. Nous identifierons V_n à l'espace dont les points z sont les trajectoires d'isométries. Dans un système de coordonnées adapté (x^0, x^i), $(i = 1, 2, \ldots, n)$, la fonction $\mathcal{L}$ est localement indépendante de la variable x^0:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^j, \dot{x}^0) .$$

Nous allons montrer qu'il est possible de douer la variété quotient V_n de structure de variété finslérienne au moyen de fonctions $L(z, \dot{z})$ de façon qu'aux géodésiques de V_{n+1} extrêmales de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathcal{L}(x, \dot{x})\, du \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{du}\right) \tag{7.1}$$

correspondent par projection sur V_n des extrêmales de

$$\int_{z_0}^{z_1} L(z, \dot{\ })\, du \qquad \left(\dot{\ } = \frac{dz}{du}\right) . \tag{7.2}$$

Dans la suite, tout indice grec $= 0, 1, 2, \ldots, n$; tout indice latin $= 1, 2, \ldots, n$ et nous supposons

$$\partial_{\dot{0}\dot{0}} \mathcal{L} \neq 0 , \qquad \partial_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha} .$$

Donnons-nous une extrêmale de (7. 1) par une représentation paramétrique $x^\alpha(u)$, u désignant un paramètre arbitraire. Le système différentiel aux extrêmales de (7. 1)

$$\frac{dx^\alpha}{du} = \dot{x}^\alpha \tag{7.3}$$

où $\dot{x}^\alpha$ satisfait à

$$\frac{d}{du}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{7.4}$$

est caractérisé par le fait d'admettre l'invariant intégral relatif

$$\omega = \sum\nolimits_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} dx^\alpha = \partial_{\dot{k}} \mathcal{L}\, dx^k + \partial_{\dot{0}} \mathcal{L}\, dx^0 . \tag{7.5}$$

En vertu de l'hypothèse $\partial_0 \mathcal{L} = 0$, on a l'intégrale première

$$\partial_{\dot{0}} \mathcal{L} = h . \tag{7.6}$$

Comme $\partial_{\dot{0}\dot{0}} \mathcal{L} \neq 0$, on peut résoudre (7.6) par rapport à $\dot{x}^0$; on obtient l'équation équivalente

$$\dot{x}^0 = \varphi(x^k, \dot{x}^l, h) \tag{7.7}$$

où φ est une fonction homogène et de degré 1 par rapport aux $\dot{x}^l$ et dépendant effectivement de h.

Considérons la famille des extrêmales (E_h) correspondant à une valeur déterminée de la constante h. Pour cette famille, le dernier terme de ω a la valeur hdx^0 et définit un invariant intégral relatif. Il en résulte que cette famille d'extrêmales admet l'invariant intégral relatif

$$\partial_{\dot{k}} \mathcal{L}\, dx^k . \tag{7.8}$$

Or d'après l'homogénéité de $\mathcal{L}$, on a

$$\dot{x}^k \partial_{\dot{k}} \mathcal{L} + \dot{x}^0 \partial_{\dot{0}} \mathcal{L} = \mathcal{L} .$$

Par suite, pour toute solution (7. 6) ou (7. 7), la quantité $x^k \partial_{\dot{k}} \mathcal{L}$ peut s'exprimer par une fonction L des variables x^k, $\dot{x}^l$, h

$$\mathrm{L}(x^k, \dot{x}^l, h) = \mathcal{L}[x^k, \dot{x}^l, \varphi(x^k, \dot{x}^l, h)] - h\,\varphi(x^k, \dot{x}^l, h) \tag{7,9}$$

et l'on a

$$\partial_{\dot{k}} \mathrm{L} = \partial_{\dot{k}} \mathcal{L} + \partial_{\dot{0}} \mathcal{L} \partial_{\dot{k}} \varphi - h \partial_{\dot{k}} \varphi = \partial_{\dot{k}} \mathcal{L}\,.$$

Ainsi, d'après (7. 8), les projections des (E_h) sur V_n sont définies par un système différentiel qui admet l'invariant intégral relatif

$$\pi = \partial_{\dot{k}} \mathrm{L}\, dx^k\,.$$

Autrement dit, elles sont extrémales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \mathrm{L}(x^k, \dot{x}^l, h)\, du \tag{7.10}$$

où h a la valeur choisie.

On appelle *descente* la correspondance qui à la fonction $\mathcal{L}(x^k, \dot{x}^l, \dot{x}^0)$ fait correspondre la fonction $\mathrm{L}(x^k, \dot{x}^l, h)$. Le problème inverse est possible [3].

8. Projection des géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\overline{\mathrm{V}}_4$.

Nous supposons que la variété $\overline{\mathrm{V}}_4$ satisfasse aux hypothèses du paragraphe précédent. La fonction $\mathcal{L}$ est définie par la relation

$$\mathcal{L}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \tag{8.1}$$

où le second membre est une forme quadratique non dégénérée comme on peut le vérifier. Etudions d'abord les extrêmales correspondant aux valeurs de $\dot{x}^\alpha$ pour lesquelles le second membre est positif. On sait d'ailleurs qu'il suffit qu'une géodésique le rende positif en un point pour qu'il en soit de même tout le long de la géodésique.

---

3) Voir A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Livre II, chap. premier.