

# 10. Interprétation du signe ' de $\int_0^\alpha x^\alpha dx$ .

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$(9.5) \quad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \frac{n}{\sqrt{U}} d\sigma$$

où l'on a posé  $d\sigma^2 = -g_{ij} dx^i dx^j$ . On voit apparaître l'influence du champ gravitationnel sur la propagation du champ électromagnétique.

Si  $U = 1$ , on démontre que l'espace-temps  $V_4$  est euclidien. L'énoncé du théorème devient

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \delta \int_{z_0}^{z_1} nd\sigma = 0.$$

Nous retrouvons l'énoncé exact du principe de FERMAT en Optique. Le théorème que nous avons établi, en constitue donc l'énoncé généralisé en relativité. Il donne plus généralement la loi de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu en mouvement, la vitesse du milieu intervenant dans l'expression des  $g_{\alpha\beta}$ .

### 10. Interprétation du signe $\varepsilon'$ de $\bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$ .

L'équation

$$\mathcal{L}^2 du^2 = \frac{1}{\bar{g}_{00}} (\bar{g}_{0\alpha} dx^\alpha)^2 + \hat{g}_{ij} dx^i dx^j = 0$$

représente le cône caractéristique  $\bar{C}_x$  au point  $x$  des équations de MAXWELL. Les deux nappes de ce cône sont symétriques par rapport à l'hyperplan élémentaire  $\pi_x$

$$\bar{g}_{0\alpha} dx^\alpha = 0.$$

Désignons par  $M(x^\alpha)$  le sommet de ce cône  $\bar{C}_x$ . Prenons un couple de points voisins de  $M$ , ayant pour coordonnées spatiales  $(x^i + dx^i)$  appartenant respectivement aux deux nappes de  $\bar{C}_x$  et symétriques par rapport à  $\pi_x$ . Soient

$$M_1(x^0 + dx^0, x^i + dx^i) \quad M'_1(x^0 - d'x^0, x^i + dx^i).$$

On peut dire que  $MM_1$  représente aux infiniment petits d'ordre supérieur près le déplacement infinitésimal associé à un rayon

électromagnétique allant du point d'espace A ( $x^i$ ) au point d'espace A' ( $x^i + dx^i$ ) dans le temps  $dx^0$ . De même,  $M_1M$  peut être considéré comme représentant le déplacement infinitésimal associé à un rayon électromagnétique allant du point A' ( $x^i + dx^i$ ) au point A ( $x^i$ ) dans le temps  $d'x^0$ .

Les deux points  $M_1$  et  $M_1'$  sont symétriques par rapport à l'hyperplan  $\pi_x$ , on doit avoir

$$\bar{g}_{0\alpha} dx^\alpha = - \bar{g}_{0\alpha} d'x^\alpha .$$

On en déduit

$$d'x^0 = dx^0 + 2 \frac{\bar{g}_{0i} dx^i}{\bar{g}_{00}} .$$

Cette relation montre que, sauf dans le cas statique, le temps mis par un rayon pour aller du point d'espace A ( $x^i$ ) au point d'espace A' ( $x^i + dx^i$ ) n'est pas le même que le temps mis par un autre rayon pour aller de A' ( $x^i + dx^i$ ) à A ( $x^i$ ).

## 11. Cas d'un espace-temps de MINKOWSKI et loi relativiste de la composition des vitesses.

Plaçons-nous dans le cas d'un espace-temps sans gravitation de MINKOWSKI, rapporté à un système de coordonnées galiléennes réduites. Nous avons la métrique d'univers

$$(11.1) \quad ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 .$$

$\vec{u}$  représente dans ce cas le vecteur vitesse unitaire d'univers dont les composantes sont déterminées classiquement à partir de la vitesse d'espace  $\vec{\beta}$ , la vitesse limite  $c$  étant prise comme unité. Un calcul facile donne la métrique associée

$$(11.2) \quad d\bar{s}^2 = \frac{V^2 - \beta^2}{1 - \beta^2} (dx^0)^2 + 2 \frac{1 - V^2}{1 - \beta^2} \beta_i dx^0 dx^i - \sum_i (dx^i)^2 - \frac{1 - V^2}{1 - \beta^2} (\beta_i dx^i)^2 .$$

A partir de cette métrique, cherchons à exprimer le théorème de FERMAT en prenant l'arc  $\sigma$  du rayon électromagnétique comme paramètre. Nous avons à remplacer dans (9. 2)  $\dot{x}^i$  par

$$\lambda^i = \frac{dx^i}{d\sigma}$$