11. Cas d'un espace-temps de MINKOWSKI et loi relativiste de la composition des vitesses.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

électromagnétique allant du point d'espace A (x^i) au point d'espace A′ ($x^i + dx^i$) dans le temps dx^0. De même, M'_1M peut être considéré comme représentant le déplacement infinitésimal associé à un rayon électromagnétique allant du point A′ ($x^i + dx^i$) au point A (x^i) dans le temps $d'x^0$.

Les deux points M_1 et M'_1 sont symétriques par rapport à l'hyperplan π_x, on doit avoir

$$\bar{g}_{0\alpha}\, dx^\alpha = - \bar{g}_{0\alpha}\, d' x^\alpha .$$

On en déduit

$$d' x^0 = dx^0 + 2 \frac{\bar{g}_{0i}\, dx^i}{\bar{g}_{00}} .$$

Cette relation montre que, sauf dans le cas statique, le temps mis par un rayon pour aller du point d'espace A (x^1) au point d'espace A′ ($x^i + dx^i$) n'est pas le même que le temps mis par un autre rayon pour aller de A′ ($x^i + dx^i$) à A (x^i).

11. Cas d'un espace-temps de MINKOWSKI et loi relativiste de la composition des vitesses.

Plaçons-nous dans le cas d'un espace-temps sans gravitation de Minkowski, rapporté à un système de coordonnées galiléennes réduites. Nous avons la métrique d'univers

(11.1) $$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 .$$

$\vec{u}$ représente dans ce cas le vecteur vitesse unitaire d'univers dont les composantes sont déterminées classiquement à partir de la vitesse d'espace $\vec{\beta}$, la vitesse limite c étant prise comme unité. Un calcul facile donne la métrique associée

(11.2) $$d\bar{s}^2 = \frac{V^2 - \beta^2}{1 - \beta^2} (dx^0)^2 + 2 \frac{1 - V^2}{1 - \beta^2} \beta_i\, dx^0\, dx^i - \sum_i (dx^i)^2 - \frac{1 - V^2}{1 - \beta^2} \left(\beta_i\, dx^i\right)^2 .$$

A partir de cette métrique, cherchons à exprimer le théorème de Fermat en prenant l'arc σ du rayon électromagnétique comme paramètre. Nous avons à remplacer dans (9. 2) $\dot{x}^i$ par

$$\lambda^i = \frac{dx^i}{d\sigma}$$

où $d\sigma^2 = -\sum_i (dx^i)^2$. Il vient

$$(11.3) \qquad \int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1} \left\{ \varepsilon\varepsilon' \sqrt{\frac{1-\beta^2}{V^2-\beta^2}[V^2 - \beta^2 + (1-V^2)\left(\beta_i \lambda^i\right)^2} - \frac{1-V^2}{V^2-\beta^2}\left(\beta_i \lambda^i\right) \right\} d\sigma$$

et l'on peut en déduire

$$\frac{dx^0}{d\sigma} = \frac{1}{W} = \varepsilon\varepsilon' \sqrt{\frac{1-\beta^2}{V^2-\beta^2}[V^2 - \beta^2 + (1-V^2)\left(\beta_i \lambda^i\right)^2} - \frac{1-V^2}{V^2-\beta^2}\left(\beta_i \lambda^i\right).$$

Si $V^2 - \beta^2 \neq 0$, cette relation donne

$$(11.4) \qquad 1 - \beta^2 - (1-\beta^2) W^2 - (1-V^2)\left(1 - W \beta_i \lambda^i\right)^2 = 0 .$$

Si on interprète $\vec{V}$ comme vitesse absolue et $\vec{W}$ comme vitesse relative de propagation de l'onde électromagnétique considérée dans l'espace euclidien ordinaire, on a manifestement

$$(11.5) \qquad \vec{V}^2 = \frac{1}{(1+\vec{W}\cdot\vec{\beta})^2}[\vec{\beta}^2 + 2\vec{W}\cdot\vec{\beta} + (1-\beta^2)\vec{W}^2 + (\vec{W}\cdot\vec{\beta})^2] .$$

On vérifie par un calcul direct à partir de (9.4) que cette relation reste valable dans le cas où $V^2 - \beta^2 = 0$.

En cherchant à mettre en évidence dans le crochet de (11. 5) un vecteur colinéaire à $\vec{\beta}$ et un autre qui lui est orthogonal, on obtient

$$(11.6) \quad \vec{V}^2 = \frac{1}{(1+\vec{W}\cdot\vec{\beta})^2}\left[\left(1 + \frac{\vec{W}\cdot\vec{\beta}}{\beta^2}\right)\vec{\beta} + \sqrt{1-\beta^2}\left(\vec{W} - \frac{\vec{W}\cdot\vec{\beta}}{\beta^2}\vec{\beta}\right)\right]^2$$

On en déduit

$$\vec{V} = \frac{1}{1+\vec{W}\cdot\vec{\beta}}\left[\left(1 + \frac{\vec{W}\cdot\vec{\beta}}{\beta^2}\right)\vec{\beta} + \sqrt{1-\beta^2}\left(\vec{W} - \frac{\vec{W}\cdot\vec{\beta}}{\beta^2}\vec{\beta}\right)\right] .$$

C'est la formule relativiste de la composition des vitesses [4].

Faculté des Sciences, Besançon.

---

4) Cf. A. LICHNEROWICZ, *Eléments de calcul tensoriel*, chap. VII, pp. 173-175.