

SUR L'EXISTENCE D'UN CERCLE PASSANT PAR UN NOMBRE DONNÉ DE POINTS AUX COORDONNÉES ENTIÈRES

Autor(en): **Schinzel, André**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-34627>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR L'EXISTENCE D'UN CERCLE
PASSANT PAR UN NOMBRE DONNÉ DE POINTS
AUX COORDONNÉES ENTIÈRES

par André SCHINZEL, Varsovie

(Reçu le 29 janvier 1958.)

Le but de cette Note est de démontrer ce

THÉORÈME: *Quel que soit le nombre naturel n , il existe dans le plan un cercle dont la circonférence contient précisément n points aux coordonnées entières.*

(Ce théorème a été mentionné dans l'article de M. W. SIERPIŃSKI paru dans ce fascicule, page 25.)

Démonstration. — Pour n impair, $n = 2k + 1$, où k est un entier ≥ 0 , le cercle au centre $(\frac{1}{3}, 0)$ et au rayon $5^k/3$ satisfait à notre théorème.

En effet, d'après un théorème connu sur le nombre de décompositions en deux carrés, l'équation $x^2 + y^2 = 5^{2k}$ a $4(2k + 1)$ solutions en nombres entiers x et y . Comme $5^{2k} \equiv 1 \pmod{3}$ pour $k = 0, 1, 2, \dots$, on démontre sans peine que dans chaque telle solution, un et un seul des nombres x et y est divisible par 3. Les solutions se divisent donc en $2k + 1$ quadruples disjointes: $(x, y), (x, -y), (y, x), (-y, x)$, où x est un entier divisible par 3 et y un entier qui n'est pas divisible par 3. Dans chaque tel quadruple, une et une seule solution satisfait à la condition que le premier terme de la paire $\equiv -1 \pmod{3}$ et le second $\equiv 0 \pmod{3}$. Il existe donc précisément $2k + 1 = n$ solutions en nombres entiers z et t de l'équation $(3z - 1)^2 + (3t)^2 = 5^{2k}$, c'est-à-dire de l'équation $(z - \frac{1}{3})^2 + t^2 = (\frac{5^k}{3})^2$. Cela prouve qu'il existe précisément n points aux coordonnées entières sur

le cercle déterminé par cette équation, ce qui démontre notre théorème pour n impair.

Pour n pair, $n = 2k$, où k est un nombre naturel, le cercle au centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et au rayon $5^{\frac{k-1}{2}}/2$ satisfait à notre théorème.

En effet, d'après le théorème mentionné plus haut, l'équation $x^2 + y^2 = 5^{k-1}$ a précisément $4k$ solutions en nombres entiers x et y . Or, des nombres x, y , un et un seul est pair et ainsi toutes les solutions se divisent en $2k$ paires disjointes (x, y) et (y, x) qui ne diffèrent entre elles que par l'ordre de leurs termes. Dans chaque telle paire précisément une solution satisfait à la condition que le premier élément est impair et le second pair. Il existe donc précisément $2k = n$ solutions en nombres entiers z, t de l'équation $(2z - 1)^2 + (2t)^2 = 5^{k-1}$, c'est-à-dire à l'équa-

tion $\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + t^2 = \left(\frac{5^{\frac{k-1}{2}}}{2}\right)^2$, ce qui démontre notre théorème pour n pair.

Notre théorème se trouve ainsi démontré.