Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 4 (1958)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET FONCTIONS MÉROMORPHES

Autor: Valiron, Georges

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-34634

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET FONCTIONS MÉROMORPHES *

par Georges VALIRON †

FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET D'ORDRE NUL
(suite)

IV. THÉORÈME DE WIMAN. EXTENSIONS ET APPLICATIONS.

22. *Théorème de Boutroux-Cartan.*

Ce théorème est relatif au module minimum d'un polynôme à l'extérieur de domaines contenant les zéros. Obtenu par Boutroux dans le cas des polynômes à variable et zéros réels (Thèse, 1903) il a été complété par H. CARTAN (Thèse, 1928).

Etant donné un polynôme canonique $P(z) = \prod_1^n (z - z_\nu)$, H *un nombre positif arbitraire et e la base des logarithmes, on a*

$$|P(z)| > \left(\frac{H}{e}\right)^n$$

pourvu que l'on prenne z *à l'extérieur de* n *cercles au plus dont la somme des rayons est au plus* 2H.

Il existe un entier λ_1 supérieur ou égal à tous les autres, tel qu'il existe un cercle C_1 de rayon $\lambda_1 \frac{H}{n}$ qui contient exactement λ_1 points z_ν à son intérieur. En effet, si aucun cercle de rayon H ne contient tous les zéros, on peut considérer les cercles de rayon $(n-1)\frac{H}{n}$, si aucun d'eux ne contient $n-1$ zéros, on considère les cercles correspondant à $\lambda_1 = n-2$, etc. Si l'on arrive à $\lambda_1 = 1$ sans avoir trouvé λ_1, chacun des cercles de rayon $\frac{H}{n}$ ayant pour centre les z_ν contient un seul zéro, donc $\lambda_1 = 1$. Car si l'un de ces cercles de centre z_ν contenait $q > 1$ points z_ν, le cercle concentrique de rayon $q\frac{H}{n}$ en contiendrait $q' > q$ (sinon on aurait eu $\lambda_1 = q$), le cercle concentrique de

*) Série de cours et de conférences sur la théorie des fonctions entières, faits en 1948 au Caire et à Alexandrie, d'après le manuscrit revu et mis au point par le professeur Henri MILLOUX.

rayon $q'\frac{H}{n}$ en contiendrait $q'' > q'$, etc., ce qui conduirait à une contradiction, il y aurait plus de n zéros.

Ainsi, il existe un λ_1 et un cercle correspondant C_1. Les points contenus dans C_1 seront les *points de rang* λ_1. Considérons maintenant les $n - \lambda_1$ autres points. Il existe un plus grand entier λ_2 et un cercle C_2 de rayon $\lambda_2\frac{H}{n}$ qui contient exactement λ_2 de ces points. *On a* $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$. Sinon, C_2 contiendrait $\lambda' \geqslant \lambda_2$ points de l'ensemble total z_ν, un cercle concentrique de rayon $\lambda''\frac{H}{n}$ contiendrait $\lambda'' > \lambda_1$ points de l'ensemble total, contrairement à la définition de λ_1. Les points, autres que ceux de rang λ_1 déjà considérés, contenus dans C_2 sont *les points de rang* λ_2 ($\lambda_2 \leqslant \lambda_1$). Ne considérant plus que les $n - \lambda_1 - \lambda_2$ autres points, on définit les *points de rang* λ_3, ($\lambda_3 \leqslant \lambda_2$), qui sont contenus dans un cercle C_3 de rayon $\lambda_3\frac{H}{n}$. Et ainsi de suite. La somme des rayons des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_p$ ainsi obtenus est

$$\frac{H}{n}(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p) = H .$$

Tout cercle S de rayon $\lambda\frac{H}{n}$, où λ est entier, qui contient au moins λ points z_ν, en contient un au moins de rang supérieur ou égal à λ; c'est une conséquence immédiate de la définition du rang.

Marquons alors les cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$ respectivement concentriques à $C_1, C_2, \ldots, C_p$ et de rayons respectivement doubles et prenons z à l'extérieur de ces cercles Γ. Un cercle S de centre z et rayon $\lambda\frac{H}{n}$, où λ est entier, contient au plus $\lambda - 1$ points z_ν. En effet, si z_ν est intérieur à S et si λ_j est son rang et a_j le centre du cercle C_j correspondant, on a

$$2\lambda_j\frac{H}{n} \leqslant |z - a_j| < \lambda_j\frac{H}{n} + \lambda\frac{H}{n}$$

donc $\lambda_j < \lambda$; S contient $\lambda - 1$ points z_ν au plus. Rangeons les z_ν dans l'ordre des distances non décroissantes à z, la distance du $q^{\text{ième}}$ point à z sera au moins $q\frac{H}{n}$, on aura

$$|P(z)| \geqslant \left(\frac{H}{n}\right)^n n! \geqslant \left(\frac{H}{n}\right)^n$$

ce qui démontre le théorème puisque la somme des rayons des cercles Γ est 2H [13].

23. *Etude du module d'une fonction d'ordre nul à l'extérieur de certains cercles.*

Une fonction d'ordre nul, égale à 1 pour $z = 0$, est de la forme

$$f(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right), \qquad \sum \frac{1}{|\alpha_n|} \text{ convergent.}$$

Donnons-nous une fonction $\beta(x)$ telle que lorsque x (réel) tend vers l'infini,

$$\beta(x) \downarrow 0 \ , \qquad x\beta|(x) > 1 \ ,$$

et considérons la suite de cercles de centre $z = 0$ et rayons

$$R_1 \ , \quad R_2 = (1 + \beta(R_1))\, R_1 \ , \ldots \ , \quad R_{m+1} = (1 + \beta(R_m))\, R_m \ .$$

D'après la seconde hypothèse sur β, R_m croît indéfiniment avec m. Appelons D_m la couronne $R_m \leqslant |z| \leqslant R_{m+1}$ et D'_m la couronne définie par

$$R'_m < |z| < R''_m \ , \ R'_m = R_m(1 - \beta(R_m)) \ , \ R''_m = R_m(1 + 2\beta(R_m)) \ .$$

Désignons par m' et m'' les nombres $n(r)$ de zéros de $f(z)$ pour $r = R'_m$ et $r = R''_m$ respectivement et appliquons au polynôme

$$g_m(z) = \prod_{m'+1}^{m''} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) = \prod_{m'+1}^{m''} \frac{(\alpha_n - z)}{\alpha_n}$$

le théorème de Boutroux-Cartan. Nous aurons

$$|g_m(z)| > \left(\frac{H}{e}\right)^{m''-m'} \left(\frac{1}{R''_m}\right)^{m''-m'} \tag{1}$$

pourvu que z soit extérieur à $m'' - m'$ cercles dont la somme des rayons est au plus 2H. Nous prendrons

$$H = R'_m\, \beta(R_m)^2 \ ,$$

l'inégalité (1) aura lieu dans toute la couronne D_m sauf au plus dans $m'' - m'$ cercles dont la somme des rayons est au plus

égale à

$$2\,R_m\,\beta\,(R_m)^2\,, \tag{2}$$

ces cercles pouvant couper les cercles limitant la couronne. Appelons Δ_m la portion de D_m extérieure à ces cercles. Dans Δ_m, on a d'après (1)

$$\log|g_m(z)| > -2\,m''\log\frac{2}{\beta(R_m)} > \frac{-4\,m''}{\beta(R_m)}\,, \tag{3}$$

dès que m est assez grand.

On a, dans D_m,

$$f(z) = \prod_1^{m'}\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right)\prod_{m''+1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right)\cdot g_m(z)\,. \tag{4}$$

Dans le second produit $|\alpha_n| > R_m(1+2\beta) > r\,\dfrac{1+2\beta}{1+\beta}$ en posant pour simplifier $\beta = \beta(R_m)$, et $|z| = r$, donc

$$\log\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right) \geqslant \log\left(1-\frac{r}{|\alpha_n|}\right) > -\frac{r}{|\alpha_n|}\,\frac{|\alpha_n|}{|\alpha_n|-r} > -\frac{r}{|\alpha_n|}\,\frac{1+2\beta}{\beta}\,.$$

Le logarithme du module du second produit dans (4) est donc supérieur à

$$-\frac{3}{\beta}\sum_{m''+1}^{\infty}\frac{r}{|\alpha_n|} > -\frac{3\,r}{\beta}\sum_{m''+1}^{\infty}\frac{1}{|\alpha_n|} > -\frac{3\,r}{\beta}\int_r^{\infty}\frac{n(x)\,dx}{x^2}\,, \tag{5}$$

pourvu que m soit assez grand.

On a d'ailleurs, si m est assez grand,

$$\int_r^{\infty}\frac{n(x)\,dx}{x^2} > \int_{R''_m}^{\infty}\frac{n(x)\,dx}{x^2} > \frac{m''}{R''_m} > \frac{m''}{3\,r}\,. \tag{6}$$

Le premier facteur de (4) peut s'écrire

$$\frac{z^{m'}}{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_{m'}}\prod_1^{m'}\left(\frac{\alpha_n}{z}-1\right),$$

ou encore

$$\frac{z^n}{\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_n}\,\frac{\alpha_{m'+1}\cdots\alpha_n}{z^{n-m'}}\prod_1^{m'}\left(\frac{\alpha_n}{z}-1\right), \qquad n = n(r)\,. \tag{7}$$

Dans cette expression, le logarithme du module du premier facteur est

$$\int_0^r \frac{n(x)\,dx}{x}\,; \tag{8}$$

dans le second facteur, les $|\alpha_j|$ sont supérieurs ou égaux à R'_m et $|z|$ moindre que R_{m+1}, le logarithme du module de ce facteur est supérieur à

$$-n \log \frac{1+\beta}{1-\beta} > -2n \geqslant -2m''$$

si m est assez grand. Enfin, le troisième facteur dans (7) dans lequel $|\alpha_n - z| \geqslant r - |\alpha_n| \geqslant r - r(1-\beta) = r\beta$ a son logarithme supérieur à

$$-m' \log \frac{1}{\beta} > -\frac{m''}{\beta}\,.$$

Le module du premier facteur de (4) est donc supérieur à l'expression (8) diminuée de $-m''\,\frac{2}{\beta}$. En tenant compte de ce résultat et des inégalités (3), (5) et (6) on obtient, dans Δ_m, l'inégalité

$$\log |f(z)| > \int_0^r \frac{n(x)\,dx}{x} - \frac{2r}{\beta(R_m)} \int_r^\infty \frac{n(x)\,dx}{x^2}$$

qui, rapprochée de l'égalité (21) du n° 21, montre que:

Pour toute fonction d'ordre nul f (z) *(même si* f (0) = 0*), on a, à l'extérieur des régions circulaires contenant les zéros,*

$$\log |f(z)| = \int_0^r \frac{n(x)\,dx}{x} + O(\log r) + \theta' r \int_r^\infty \frac{n(x)\,dx}{x^2}\,, \quad -\frac{K}{\beta(r)} < \theta' < 1\,, \tag{9}$$

K *étant une constante numérique et* $\beta(r)$ *tendant vers zéro lorsque* $r \to \infty$. *La fonction* $\beta(r)$ *peut être choisie arbitrairement telle que* $\beta(r) \downarrow 0$, $r\beta(r) > 1$ *et les régions circulaires exclues dans la couronne* $r(1-\beta(r)) < |z| < r(1+\beta(r))$ *sont constituées par moins de* $n[r(1+\beta(r)]$ *cercles dont la somme des rayons est moindre que* $r\,\beta(r)^2 K'$, K' *étant une constante numérique.*

Pour toute fonction vérifiant la condition (28) du n° 21, on pourra prendre pour $\beta(r)$ la racine carrée du rapport figurant dans (28) ou plus exactement le maximum de cette racine carrée entre r et ∞. Dans les régions restantes, on aura

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log |f(z)|}{N(r, 0)} = 1 . \tag{10}$$

24. *Conséquences de l'étude précédente. Théorème de Littlewood et fonctions de la classe normale. Fonctions de la classe* W.

Si $f(z)$ est une fonction d'ordre nul quelconque, nous avons vu que l'on a l'égalité (27). Comme la fonction

$$\int_r^\infty \frac{n(x)}{x^2} dx$$

décroît lorsque r croît, tandis que $N(r, 0)$ croît, on déduit de (27) qu'il existe une suite de couronnes $R < |z| < kR$, $k > 1$ dans lesquelles le rapport de

$$r \int_r^\infty \frac{n(x)}{x^2} dx , \qquad |z| = r ,$$

à $N(r)$ tend vers zéro lorsque $R \to \infty$. On pourra prendre pour $\beta(r)$ la racine carrée de ce rapport et dans la portion de la couronne extérieure aux cercles d'exclusion, on aura l'égalité (10). Comme la somme des rayons des cercles exclus dans une couronne d'épaisseur relative $2\beta(r)$ est $Kr\beta(r)^2$, il existera des circonférences $|z| = r$ appartenant à la région non exclue, ce qui donne le théorème de Littlewood:

I. *Pour toute fonction d'ordre nul, existe une suite de circonférences* $|z| = r$, *de rayons indéfiniment croissants, sur lesquelles* $\log |f(z)| \sim \log M(r, f)$.

Nous appellerons *fonction d'ordre nul de la classe normale*, toute fonction $f(z)$ pour laquelle l'égalité (28) du n° 21 est vérifiée. Le théorème du n° 23 s'applique quel que soit r en choisissant $\beta(r)$ comme il a été dit à la fin du n° 23. Dans la couronne $r(1 - \beta(r)) < r = |z| < r(1 + \beta(r))$, les régions exclues

appartiennent à un nombre fini de couronnes dont la somme des épaisseurs est $Kr\beta(r)^2$, infiniment petite par rapport à l'épaisseur totale $2r\beta(r)$. Si deux cercles d'exclusion se coupent, on peut les remplacer par un seul, ce qui n'augmente pas la somme des rayons. On peut donc supposer ces cercles extérieurs les uns aux autres. Chaque cercle d'exclusion est vu de l'origine sous un angle qui tend vers zéro lorsque le centre du cercle tend vers l'infini; il contient au moins un zéro. Ainsi, compte tenu de l'égalité (26) du n° 21:

II. *Pour une fonction entière d'ordre nul de la classe normale, on a*

$$\log |f(z)| \sim \log M(r, f) , \qquad |z| = r , \tag{11}$$

à la condition d'exclure des cercles contenant les zéros, extérieurs les uns aux autres, la somme des rayons des cercles exclus dont le centre est à une distance de l'origine comprise entre R *et* 2R *étant* o (R). *En conséquence, les cercles exclus sont vus de l'origine sous un angle qui tend vers zéro lorsque le centre s'éloigne indéfiniment.*

D'après l'égalité (10), les régions du plan où $|f(z)| < A$, A étant fixe et arbitrairement grand, sont intérieures aux cercles d'exclusion dès que $|z|$ est assez grand, les zéros de $f(z) - Z$, $|Z| < A$ sont intérieurs à ces mêmes régions. On peut d'ailleurs supposer que A augmente indéfiniment, il suffit que $\log |Z| \leqslant \mu \left(\log M\left(\frac{r}{2}, f\right)\right)$, $\mu < 1$, pour que les zéros de $f(z) - Z$ soient dans les régions exclues. Les cercles exclus sont donc des cercles de remplissage d'après la terminologie de Milloux et le théorème II contient et précise, pour la classe de fonctions considérée le théorème de Julia[14]. On a pour ces fonctions des renseignements précis sur la position des points où $f(z)$ prend une valeur arbitraire Z et sur leurs déplacements lorsque Z varie.

Considérons maintenant un nombre fixe A. Dès que r est assez grand pour que $\log A = \mu \left(\log M\left(\frac{r}{2}, f\right)\right)$, $\mu < 1$, les domaines en lesquels

$$|Z = f(z)| < A$$

sont intérieurs aux cercles de remplissage ainsi que leurs fron-

tières. Un tel domaine Δ est simplement connexe et sur sa frontière $|f(z)| = A$. Lorsque z varie dans Δ, le point $Z = f(z)$ décrit un domaine du plan des Z limité par la circonférence $|Z| = A$. Pour tous les Z tels que $|Z| < A$, l'équation $f(z) = Z$ a le même nombre de solutions égal au nombre des zéros de $f(z)$ situés dans Δ (on le voit par le théorème de Rouché), si ν est le nombre de ces solutions, la fonction inverse $z = f_{-1}(Z)$ de $Z = f(z)$ est une fonction à ν branches dont les points critiques correspondent aux zéros de $f'(z)$. Autrement dit, la surface de Riemann décrite par $Z = f(z)$, lorsque z décrit Δ, a ν feuillets, c'est un cercle à ν feuillets. On peut rendre les branches de $f_{-1}(Z)$ uniformes en empêchant les rotations autour des points critiques $Z^j = f(z^j)$, $f'(z_j) = 0$. A cet effet, on peut joindre les points Z^j à la circonférence $|Z| = A$ en suivant le rayon $\arg Z = \arg Z^j$, $|Z| \geqslant |Z^j|$ lorsque $Z^j \neq 0$, et un rayon arbitraire distinct des précédents si $Z^j = 0$. On forme ainsi, dans le plan simple des Z, un domaine simplement connexe D_A que les ν branches de $z = f_{-1}(Z)$ rendues holomorphes, et qui sont univalentes, représentent sur ν domaines Δ_j sans points communs qui constituent avec leurs frontières le domaine Δ. Un arc de frontière d'un Δ_j qui n'est frontière que de Δ_j peut être supprimé sans que Δ_j cesse d'être simplement connexe; dans ces domaines Δ_j, $f(z)$ est univalente; les frontières de Δ_j qui ne sont pas arcs de frontière de Δ fournissent les lignes le long desquelles on passe d'un feuillet de la surface de Riemann à un autre feuillet. Le nombre total des points critiques sur la surface de Riemann, comptés avec leur ordre de multiplicité est égal au nombre des racines de $f'(z) = 0$ appartenant à Δ; on supposera, en remplaçant s'il y a lieu A par un nombre voisin, qu'il n'y a pas de zéro de $f'(z)$ sur la ligne $|f(z)| = A$ frontière de Δ. D'après un théorème connu [15] que nous admettrons, le nombre des zéros de $f'(z)$ appartenant à Δ est $\nu - 1$. On a ainsi $\nu - 1$ points critiques et ν feuillets. Comme à un point critique d'ordre q correspondent $q + 1$ lignes de passage d'un feuillet à un autre, tracées sur les divers feuillets, le nombre total des lignes de passage est $\Sigma(q + 1)$ avec $\Sigma q = \nu - 1$, et comme $q + 1 \leqslant 2q$, on a $\Sigma(q + 1) \leqslant 2\nu - 2$. Comme il y a ν feuillets, l'un au moins ne contient qu'une ligne de passage. Autrement dit, dans

Δ existe au moins un domaine Δ_j dans lequel $Z = f(z)$ est univalente et représente Δ_j sur le cercle $|Z| < A$ privé au plus d'un segment porté par un rayon. Ainsi

III. *Pour une fonction d'ordre nul de la classe normale, chaque domaine Δ d'exclusion du théorème II contient au moins un domaine Δ' dans lequel $Z = f(z)$ est univalente et représente ce domaine sur un cercle $|Z| < A$ privé au plus d'un rayon ou d'un segment de rayon, A croissant indéfiniment lorsque le domaine s'éloigne indéfiniment. Le domaine Δ' appartient à un cercle qui est vu de l'origine sous un angle qui tend vers zéro lorsque Δ' s'éloigne indéfiniment.*

La nécessité de supprimer un rayon ou un segment de rayon s'impose puisque $f(z)$ peut n'avoir que des zéros multiples.

La propriété des domaines Δ' s'étend à toute fonction entière $f(z)$ pour laquelle existe une suite de courbes fermées simples Γ_n entourant l'origine telles que le minimum du module de $f(z)$ sur Γ_n tende vers l'infini lorsque n croît indéfiniment, à condition de supprimer la condition relative aux dimensions de Δ'. En effet, pour une telle fonction, les domaines dans lesquels $|f(z)| < A$ seront des domaines Δ simplement connexes bornés puisqu'ils ne coupent pas les courbes Γ_n dès que n est assez grand. Ces domaines existent. Car on peut tout d'abord, en supprimant des Γ_n, faire en sorte que Γ_{n+1} contienne Γ_n à son intérieur; si $f(z)$ ne s'annule pas entre Γ_n et Γ_{n+1} le théorème sur le maximum du module montre que $|f(z)|$ est supérieur entre Γ_n et Γ_{n+1} à son minimum sur ces courbes. Il s'ensuit que $f(z)$ s'annule entre Γ_n et Γ_{n+1} pour une suite infinie de valeurs de n; sinon $|f(z)|$ serait supérieur à tout nombre donné dès que $|z|$ serait assez grand, $\frac{1}{f(z)}$ serait holomorphe à l'infini et nulle en ce point, $f(z)$ serait un polynôme. Si $f(z)$ s'annule entre Γ_n et Γ_{n+1}, il existe entre Γ_n et Γ_{n+1} un domaine Δ dans lequel $|f(z)| < A$; ce domaine est simplement connexe puisque C étant une courbe fermée intérieure à Δ, on a sur C, donc à son intérieur, $|f(z)| < A$, l'intérieur de C appartient à Δ (en particulier, Δ n'entoure pas l'origine, la portion de plan extérieure à Δ comprise entre Γ_n et Γ_{n+1} reste connexe). On peut appliquer à Δ les raisonnements précédents. Par suite, si l'on convient

d'appeler *fonctions de la classe* W (Wiman) les fonctions entières jouissant de la propriété en question, on voit que:

IV. *Pour toute fonction entière* f (z) *de la classe* W, *il existe une suite infinie de domaines* Δ' *bornés simplement connexes tels que, dans chaque* Δ', f (z) *est univalente et prend toutes les valeurs* Z *appartenant au cercle* $|Z| < A$ *privé au plus d'un rayon ou d'un segment de rayon,* A *croissant indéfiniment lorsque* Δ' *s'éloigne indéfiniment.*

Une fonction f (z) *est de la classe* W *s'il existe une suite infinie de courbes fermées simples* Γ_n *entourant l'origine telles que le minimum du module de* f (z) *sur* Γ_n *tende vers l'infini avec* n.

D'après le théorème de Littlewood, toute fonction d'ordre nul est de la classe W.

Ce dernier résultat est contenu dans un théorème antérieur de Wiman.

25. *Fonctions d'ordre nul n'appartenant pas à la classe normale.*

Il existe des fonctions n'appartenant pas à la classe normale pour lesquelles la proposition II n'est plus vraie, c'est-à-dire pour lesquelles $|f(z)|$ reste borné dans des domaines circulaires qui sont vus de l'origine sous un angle fini. On peut construire de telles fonctions de la forme

$$f(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\alpha(n)}\right)^{q(n)}$$

où les $\alpha(n)$ sont positifs et les $q(n)$ entiers. On suppose réalisées les conditions suivantes:

$$\sum_1^m q(n) = (1 + o(1))\, q(m)\,, \tag{11}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log q(n)}{\log \alpha(n)} = 0\,, \tag{12}$$

$$\lim_{m=\infty} \alpha(m) \sum_{m+1}^\infty \frac{q(n)}{\alpha(n)} = 0\,, \tag{13}$$

$$\lim_{m=\infty} \frac{q(m-1) \log \alpha(m)}{q(m)} = 0\,. \tag{14}$$

La condition (12), compte tenu de (11), montre que l'ordre est nul. En écrivant $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = \prod_{1}^{m-1}\left(\frac{z}{\alpha(n)}\right)^{q(n)} \prod_{1}^{m-1}\left(1 - \frac{a(n)}{z}\right)^{q(n)} \left(\frac{\alpha(m) - z}{\alpha(m)}\right)^{q(m)} \prod_{m+1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\alpha(n)}\right)^{q(n)}, \quad (15)$$

et en supposant

$$\frac{\alpha(m)}{A} < |z| < 3\,\alpha(m) \quad (16)$$

où A est fixe et grand, on a les résultats suivants: Le quatrième facteur dans (15) est égal à $1 + o(1)$ en vertu de (13) qui implique que $\alpha(m)/\alpha(m+1)$ tend vers zéro; il en est de même du second en vertu de (11) et (13). Le premier facteur a un module supérieur à 1, mais moindre que

$$(3\,\alpha(m))^{q(m-1)(1+o(1))}$$

donc égal à $e^{o(1)q(m)}$ d'après (14). Le troisième facteur est de module moindre que $4^{q(m)}$; si $|z - \alpha(m)| > k\alpha(m)$, $k > 1$, le module de ce troisième facteur est supérieur à $k^{q(m)}$ tandis que lorsque $|z - \alpha(m)| < k'\,\alpha(m)$, $k' < 1$, il est inférieur à $k'^{q(m)}$. Par suite:

La fonction f (z) *a son module très petit dans la suite des cercles*

$$|z - \alpha(m)| < k'\,\alpha(m), \qquad k' < 1$$

mais elle est très grande dans la portion des couronnes (16) *qui sont extérieures respectivement aux cercles*

$$|z - \alpha(m)| > k\,\alpha(m), \qquad k > 1.$$

Dans les portions restantes des couronnes (16), $f(z)$ prend les valeurs Z différentes de zéro; les zéros de $f(z) - Z$ étant approximativement les sommets d'un polygone régulier de $q(m)$ côtés et centre $\alpha(m)$. Lorsque $m \to \infty$, on peut faire tendre k et k' vers 1 et l'on obtient des domaines d'univalence de $Z = f(z)$ que l'on peut enfermer dans des cercles vus de l'origine sous un angle qui tend vers zéro lorsque $m \to \infty$, dans chacun desquels $f(z)$ prend des valeurs Z appartenant à la couronne $\frac{1}{B_m} < |Z| < B_m$ fendue le long d'un rayon, B_m étant indéfini-

ment croissant avec m. On a donc des domaines d'univalence dont les dimensions sont analogues à celles obtenues pour les fonctions de la classe normale, mais où se présente une valeur exceptionnelle, $Z = 0$.

On peut prendre, par exemple

$$q(n) = 2^{2^{n+2}}, \quad \log \alpha(n) = 2^{2^n} \text{ [16]}.$$

Peut-on former des fonctions anormales analogues dès que la condition (22) du n° 21 n'est pas vérifiée, c'est-à-dire dès que $\log M(r, f) = (\log r)^2 \lambda(r)$, $\lambda(r)$ étant à croissance aussi lente que l'on veut ? Peut-on avoir plusieurs valeurs exceptionnelles ? Ou bien, est-il vrai que, tout au moins pour les fonctions d'ordre nul, le théorème IV du n° 24 est vrai avec des domaines Δ' enfermables dans des cercles vus de l'origine sous un angle qui tend vers zéro lorsque Δ' s'éloigne indéfiniment, à condition d'exclure de $|Z| < A$ non plus seulement un segment de rayon, mais un petit cercle $|Z - Z_{\Delta'}| < \frac{1}{A}$ et le segment de rayon de $|Z| < A$ joignant $Z_{\Delta'}$ à $|Z| = A$?

26. *Théorème de Wiman.*

Wiman a montré que $f(z)$ étant une fonction entière d'ordre ρ inférieur à $\frac{1}{2}$ et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe une suite de circonférences $|z| = r$ de rayons indéfiniment croissants sur lesquelles on a

$$\log |f(z)| > r^{\rho-\varepsilon}.$$

Cette inégalité a été précisée par Littlewood, puis par Valiron et Wiman, et a été étendue par R. Nevanlinna; des démonstrations nouvelles ont été données par Pólya, Denjoy,... Si l'on considère une fonction entière d'ordre inférieur à 1, égale à 1 à l'origine (hypothèse qui ne diminuera pas la généralité des résultats), on augmente le maximum de son module pour $|z| = r$ et on diminue le minimum du module pour $|z| = r$ en alignant les zéros sur une demi-droite sans changer leurs modules. Une inégalité de la forme $\log |f(r)| > k \log |f(-r)|$, $k > 0$ démontrée pour une fonction à zéros tous positifs entraîne

pour les fonctions dont les zéros ont les mêmes modules

$$\log |f(z)| > k \log M(r, f) , \qquad |z| = r .$$

Considérons (Pólya, Denjoy), la fonction

$$\theta(x) = \log |1 - x| - \cos(\pi\alpha) \log(1 + x) , \qquad x \geqslant 0 , \qquad 0 < \alpha < 1 ,$$

et l'intégrale

$$\Omega(x) = \int_x^\infty \frac{\theta(x)}{x^{1+\alpha}} dx .$$

Comme on a

$$\int_0^\infty \log |1 - x| \frac{dx}{x^{1+\alpha}} = \frac{\pi}{\alpha} \cot(\pi\alpha) , \qquad \int_0^\infty \frac{\log(1 + x)}{x^{1+\alpha}} dx = \frac{\pi}{\alpha \sin(\pi\alpha)} ,$$

on voit que

$$\Omega(0) = 0 , \qquad \Omega(\infty) = 0 .$$

D'autre part $\Omega'(x)$ a le signe de $-\theta(x)$, qui est positif jusqu'à une valeur x_0 puis négatif; donc $\Omega(x)$ croît, puis décroît; on a $\Omega(x) > 0$ pour $0 < x < \infty$. La fonction positive continue

$$\lambda(x) = \frac{x^\alpha \Omega(x)}{\log(1 + x)}$$

pour laquelle

$$\lim_{x=0} \lambda(x) = \frac{1 + \cos \pi\alpha}{1 - \alpha} , \qquad \lim_{x=\infty} \lambda(x) = \frac{1 - \cos(\pi\alpha)}{\alpha} ,$$

a un minimum positif $h(\alpha)$. On a, en conséquence,

$$r^\alpha \int_r^\infty (\log |1 - x| - \cos(\pi\alpha) \log(1 + x)) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} \geqslant h(\alpha) \log(1 + r) .$$

On en déduit, si $r_n > 0$, en posant $t = r_n x$, $R = r r_n$,

$$R^\alpha \int_R^\infty \left[\log \left| 1 - \frac{t}{r_n} \right| - \cos(\pi\alpha) \log \left(1 + \frac{t}{r_n}\right) \right] \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \geqslant h(\alpha) \log \left(1 + \frac{R}{r_n}\right) \cdot \quad (17)$$

Considérons alors la fonction d'ordre ρ inférieur à 1, à zéros positifs r_n,

$$f(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{r_n}\right)$$

et supposons que, α étant pris supérieur ou égal à ρ, l'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{\log M(t, f)}{t^{1+\alpha}} dt , \qquad M(t, f) = f(-t) , \tag{18}$$

soit convergente. Dans ces conditions, on peut additionner les inégalités (17) pour $n = 1, 2, \ldots$ car

$$\int_R^\infty \sum_1^\infty \left| \log \left| 1 - \frac{t}{r_n} \right| \right| \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \tag{19}$$

converge, ce que nous démontrerons ci-dessous. On obtient

$$R^\alpha \int_R^\infty [\log |f(t)| - \cos(\pi\alpha) \log |f(-t)|] \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \geqslant h(\alpha) \log M(R, f) . \tag{20}$$

Cette inégalité exige tout d'abord que l'on ait

$$\overline{\lim_{r=\infty}} [\log |f(r)| - \cos(\pi\alpha) \log M(r, f)] = \infty ,$$

sans quoi le premier membre de (20) serait borné alors que le second membre ne l'est pas. Ceci s'applique à une fonction d'ordre $\rho < 1$ en prenant α entre ρ et 1 et à une fonction d'ordre ρ et de la classe convergente en prenant $\alpha = \rho$. Par conséquent, en utilisant les remarques faites au début,

I. *Pour toute fonction d'ordre ρ inférieur à $\frac{1}{2}$ et pour $\varepsilon > 0$, il existe une suite de circonférences $|z| = r$, de rayons indéfiniment croissants, sur lesquelles*

$$\log |f(z)| > [\cos(\pi\rho) - \varepsilon] \log M(r, f) . \tag{21}$$

Pour une fonction d'ordre $\rho \leqslant \frac{1}{2}$ et de la classe convergente, il

existe une suite de circonférences de rayons indéfiniment croissants sur lesquelles

$$\log |f(z)| > \cos(\pi\rho) \log M(r, f) + \omega(r) , \qquad \lim_{r=\infty} \omega(r) = \infty .$$

En particulier, les fonctions d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$, *ou d'ordre* $\frac{1}{2}$ *et de la classe convergente appartiennent à la classe* W.

Il reste à prouver que la convergence de (18), qui entraîne, on l'a vu, la convergence de

$$J = \int_1^\infty \frac{n(x)\,dx}{x^{1+\alpha}} , \tag{22}$$

entraîne aussi la convergence de (19). Or

$$\log \left| 1 - \frac{r}{r_n} \right| < \log \left(1 + \frac{r}{r_n} \right) ,$$

et

$$- \log \left| 1 - \frac{r}{r_n} \right| = - \log \left(1 + \frac{r}{r_n} \right) + \log \left| \frac{r + r_n}{r - r_n} \right| .$$

Comme (18) converge, il reste à montrer que

$$\int_R^\infty \sum_1^\infty \log \left| \frac{r + r_n}{r - r_n} \right| \frac{dr}{r^{1+\alpha}} \tag{23}$$

converge. Si $r_n > 2r$

$$\log \frac{r + r_n}{r_n - r} = \log \left(1 + \frac{2r}{r_n - r} \right) < \log \left(1 + \frac{4r}{r_n} \right) ,$$

et puisque (18) converge, on peut remplacer dans (23) la série par la somme pour $r_n \leqslant 2r$. L'intégrale (23) ainsi modifiée est alors inférieure à

$$\sum_{q=1}^\infty \frac{1}{2^{q\alpha}} \int_{2^q}^{2^{q+1}} \sum_{r_n < 2r} \log \left| \frac{r + r_n}{r - r_n} \right| \frac{dr}{r} < \sum_{q=1}^\infty \frac{n(2^{q+2})}{2^{q\alpha}} C < 2^{1+3\alpha} C J ,$$

où C est le maximum de

$$\int_1^2 \log \left| \frac{u+\lambda}{u-\lambda} \right| du \,, \qquad \lambda > 0 \,.$$

La proposition I est ainsi complètement démontrée. On peut la compléter en utilisant d'une façon plus précise l'inégalité (20). Supposons $\rho < \frac{1}{2}$ et soit $\rho(r)$ un ordre précisé de $f(z)$. Si $\frac{1}{2} > \alpha > \rho$ et $k > 1$, on a

$$\log |f(t)| < \log |f(-t)| = \log M(t, f) < (1 + o(1))\, U(t) \,, \quad U(t) = t^{\rho(t)} \,,$$

le premier membre de (20) dans lequel on prend kR pour limite inférieure de l'intégrale est inférieur à

$$R^\alpha (1 + o(1))(1 - \cos(\pi\alpha)) \int_{kR}^{\infty} t^{\rho(t)-1-\alpha}\, dt = (1 + o(1))(1 - \cos(\pi\alpha)) \frac{U(R)}{(\alpha - \rho)\, k^{\alpha-}} \,.$$

On pourra prendre k assez grand pour que le dernier membre soit inférieur à $\frac{1}{3} U(R)\, h(\alpha)$. Il s'ensuit que, pour les valeurs de R pour lesquelles

$$\log M(R, f) \sim U(R) \,,$$

on aura

$$R^\alpha \int_R^{kR} [\log |f(t)| - \cos(\pi\alpha) \log M(t, f)] \frac{dt}{t^{1+\alpha}} > \frac{1}{2} h(\alpha)\, U(R)$$

dès que R sera assez grand. Si L est la longueur des intervalles dans lesquels le crochet figurant dans cette intégrale est positif, la valeur du premier membre est au plus égale à

$$(1 + o(1))(1 - \cos(\pi\alpha))\, U(R) \frac{L}{R} \,,$$

on a donc

$$L > R(1 - o(1)) \frac{h(\alpha)}{2 - 2\cos(\pi\alpha)} \,.$$

Par suite

II. *Si l'ordre* ρ *est inférieur à* $\frac{1}{2}$, *à* $\varepsilon > 0$ *correspond un nombre* k *tel que l'inégalité (21) a lieu pour des* r *appartenant à une suite d'intervalles* R_m, kR_m, R_m *tendant vers l'infini avec* m, *ces* r *formant des intervalles dont la somme des longueurs entre* R_m *et* kR_m *est au moins* $L(\varepsilon, \rho) R_m$. *Pour ces* r, *on a*

$$\varliminf_{r=\infty} \frac{\log M(r, f)}{U(r)} > 0 , \qquad U(r) = r^{\rho(r)} ,$$

$\rho(r)$ *étant un ordre précisé de la fonction considérée* [17].

En suivant une méthode analogue, on montre que, pour une fonction $f(z)$, d'ordre $\rho < 1$, il existe des r aussi grands que l'on veut pour lesquels

$$\log |f(z)| > (\pi\rho \cot(\pi\rho) - \varepsilon) N(r, 0) , \qquad |z| = r$$

et des r aussi grands que l'on veut, tels que

$$N(r, 0) > \left(\frac{\sin(\pi\rho)}{\pi\rho} - \varepsilon\right) \log M(r, f) ,$$

ε étant donné arbitrairement petit positif, et on a des compléments analogues à l'énoncé II.

V. Exemples de fonctions d'ordre nul.

27. *Fonctions solutions d'équations différentielles.*

Wiman a montré que les fonctions entières, ou plus généralement les fonctions de la forme $y = z^{\mu} f(z)$, où $f(z)$ est une fonction entière, qui vérifient une équation différentielle algébrique du premier ordre, $\Phi(z, y, y') = 0$ où Φ est un polynôme à trois variables, sont nécessairement d'ordre fini positif, d'ordre précisé $\rho + \frac{a}{\log r}$ et parfaitement régulières par rapport à cet ordre [18]. Mais il existe des fonctions d'ordre nul vérifiant des équations d'ordre supérieur au premier. Partons de la fonction de Jacobi,

$$S(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} z^n = A \prod_0^{\infty} (1 + z q^{2n+1}) \left(1 + \frac{q^{2n+1}}{z}\right) , \qquad |q| < 1 ,$$

(A est une constante) et posons

$$Z(z) = z\frac{S'(z)}{S(z)}, \qquad P(z) = -zZ'(z),$$

nous avons

$$z^2 P'(z)^2 = 4(P + c)^3 - G_2(P + c) - G_3,$$

c, G_2, G_3 étant des constantes qui dépendent de q. Il s'ensuit que $S(z)$ est solution d'une équation différentielle du troisième ordre, algébrique. Mais, si l'on pose

$$z + \frac{1}{z} = u, \qquad S(z) = F(u),$$

$F(u)$ est une fonction entière d'ordre nul,

$$F(u) = C\prod_0^\infty \left(1 + \frac{u\,q^{2n+1}}{1 + q^{4n+2}}\right) \tag{24}$$

qui est solution d'une équation différentielle algébrique du troisième ordre. Pour cette fonction $F(u)$, on a

$$\log M(r, F) \sim \frac{(\log r)^2}{-4\log|q|}.$$

On peut déduire de là d'autres fonctions d'ordre nul vérifiant des équations différentielles algébriques. Tout d'abord en faisant le changement de variables $u = \theta(z)$ où θ est un polynôme; les fonctions obtenues satisferont encore à la condition (22) du n° 21. On obtiendra des fonctions à croissance plus rapide en prenant

$$G(z) = F(F(z)).$$

D'après la condition (24), il existe une courbe fermée Γ_R entourant l'origine sur laquelle

$$\log|F(z)| = \frac{(\log R)^2}{-4\log|q|},$$

si grand que soit R donné, et les valeurs de $r = |z|$ vérifiant la condition

$$\log r = (1 + o(1))\log R.$$

La courbe Γ_R étant courbe de module constant de $F(z)$, l'argument de $F(z)$ varie de $2\pi n_R$, n_R étant le nombre de zéros de $F(z)$

intérieurs à Γ_R, lorsqu'on fait un tour sur Γ_R dans le sens direct, il existe donc sur Γ_R des points en lesquels l'argument de $u = F(z)$ est tel que

$$|F(u)| = M(|u|, F), \qquad \log |F u| = \frac{(\log R)^2}{-4 \log q}.$$

Il s'ensuit que

$$\log M(r, G) \sim \frac{(\log |u|)^2}{-4 \log q} \sim \frac{(\log r)^4}{(-4 \log q)^3}.$$

La fonction G vérifie une équation différentielle du sixième ordre déduite de celle de $F = y$. On a $\Phi(y, y', y'', y''', z) = 0$, de

$$G' = y'(F)\, y', \quad G'' = y''(F)\, y'^2 + y'(F)\, y'', \quad G''' = y'''(F)\, y'^3 + \ldots$$

on tire $y'''(F)$, $y''(F)$, $y'(F)$ et en portant dans $\Phi(G, y'(F), y''(F), y'''(F), F) = 0$, on obtient $\Psi(G, G', G'', G''', F, F', F'', F''') = 0$ avec $\Phi(F, F', F'', F''', z) = 0$. On peut éliminer F''' ce qui donne $\mu(G, G', G'', G''', F, F', F'', z) = 0$; on dérive et on élimine F'''; et on recommence deux fois; on a trois équations $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\rho = 0$ contenant F, F', F'' qu'on élimine.

On peut évidemment continuer ce procédé.

Existe-il des fonctions entières d'ordre nul vérifiant des équations différentielles algébriques du second ordre ? Il n'en existe pas pour lesquelles

$$\frac{\log M(r)}{(\log r)(\log_2 r)} < \frac{1}{\log 4}.$$ [19)]

Mais cette borne est-elle bonne ?

28. *Fonctions entières d'ordre nul vérifiant des équations fonctionnelles.*

Considérons l'équation de Poincaré

$$f(zs) = P_0(z)\, f(z) + P_1(z), \qquad |s| > 1,$$

où $P_0(z)$ et $P_1(z)$ sont des polynômes. Elle admet une solution entière sous la seule réserve que le calcul formel des coefficients du développement taylorien soit possible. Si l'on pose $P_0(z) = c_0 z^q + \ldots$, $|c_0| = C$, on a

$$M(rS, f) = \left(1 + \frac{O(1)}{r}\right) A r^q M(r, f), \qquad S = |1|.$$

En itérant, on obtient

$$\log M(S^n r_0, f) = q \frac{n(n-1)}{2} \log S + n \log (A r_0^q) + O(1);$$

il s'ensuit que

$$\log M(r, f) \sim \frac{q}{2 \log S} (\log r)^2.$$

De même, la méthode des fonctions majorantes montre que l'équation

$$f'(zs) = P(z, f(z)), \qquad |s| > 1,$$

admet une solution entière prenant une valeur donnée à l'origine; lorsque le second membre est du premier degré en $f(z)$, ces fonctions entières sont d'ordre nul.

Dans d'autres cas, les solutions d'équations fonctionnelles, si elles existent, ne peuvent être que des fonctions d'ordre nul. Par exemple, si l'équation

$$[f'(Q(z))]^m = R(z, f(z))$$

où $Q(z)$ est un polynôme de degré q et R une fraction rationnelle de degré p par rapport à $f(z)$, ne peut avoir de solution méromorphe que si $p \geqslant mq$; et si une telle solution existe, c'est une fonction méromorphe d'ordre nul (quotient de deux fonctions entières d'ordre nul) [20].

Soit encore la fonction entière

$$F(z; a) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a^{2n}}\right), \qquad |a| > 1,$$

qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\varphi(z^2) = \left(1 - \frac{z^2}{a}\right) \varphi(z) \varphi(-z),$$

et qui est à croissance très lente. La recherche de la solution méromorphe générale de cette équation fonctionnelle est ramenée à la résolution de

$$\varphi(z^2) = \varphi(z) \varphi(-z). \text{ [21]}$$

(A suivre).

NOTES

13) Une proposition plus générale est donnée par H. Cartan; elle a été étendue et utilisée par AHLFORS, L.: Ein Satz von Henri Cartan und seine Anwendung auf die Theorie der meromorphen Funktionen, *Commentationes phys.-math. Soc. Sci. fenn.*, **5** Nr. 16, pp. 1-19 (1931). Une proposition plus précise que celle donnée ici est démontrée, par MACINTYRE, A. et FUCHS, W. H. J.: Inequalities for the logarithmic derivatives of a polynomial, *J. London Math. Soc.*, **15**, 162-168 (1940), et utilisée par eux dans l'étude de la dérivée logarithmique d'un polynôme.

14) Pour ces questions voir, par exemple, VALIRON, G.: Directions de Borel des fonctions méromorphes. *Mémorial des Sciences mathématiques*, **89**, Gauthier-Villars, Paris (1938).

15) Voir TITCHMARCH, E. C.: Theory of functions, *loc. cit.* 12). Des extensions du théorème en question ont été données par DENJOY, A.: Sur une propriété des fonctions de variable complexe. *Versl. v. d. Koninkl. Akad. v. Wetensch. Amsterdam*, **26**, pp. 1063-1068 (1918).

16) Cet exemple est étudié dans VALIRON, G.: *loc. cit.* 4), mais sans considérations sur les domaines d'univalence. Voir aussi VALIRON, G.: Remarques sur les domaines d'univalence des fonctions entières d'ordre inférieur à ½. *Bull. Sci. Math.* (2), **71**, pp. 25-32 (1947).

17) Des énoncés de ce genre ont été donnés d'abord par AMIRA, B.: Sur un théorème de M. Wiman dans la théorie des fonctions entières. *Math. Zeitschr.*, 22, 206-221 (1925), puis par BESICOVITCH, A. S.: On integral functions of order < 1, *Math. Ann.*, 97, pp. 677-695 (1927), et Miss CARTWRIGHT, M.-L.: On the minimal modulus of integral functions, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **30**, pp. 412-420 (1934). Voir VALIRON, G.: Sur un théorème de M. Wiman, *Opusculata mathematica A. Wiman dedicata*, Upsala, 1930, pp. 1-12, et VALIRON, G.: Sur le minimum du module des fonctions entières d'ordre inférieur à un, *Mathematica (Cluj)*, XI, pp. 264-269 (1935).

18) Voir, par exemple, VALIRON, G.: *loc. cit.* 9), pp. 109-111.

19) Voir VALIRON, G.: Sur les fonctions entières d'ordre nul et les équations différentielles. *Bulletin Soc. math. France*, **53**, pp. 34-42 (1925).

20) Voir VALIRON, G.: Fonctions convexes et fonctions entières. *Bull. Soc. Math. France*, **60**, pp. 278-287 (1932).

21) Pour des équations analogues, voir VALIRON, G.: *loc. cit* 4), pp. 87-92.