V. Exemples de fonctions d'ordre nul.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Par suite

II. *Si l'ordre* ρ *est inférieur à* $\frac{1}{2}$, *à* $\varepsilon > 0$ *correspond un nombre* k *tel que l'inégalité (21) a lieu pour des* r *appartenant à une suite d'intervalles* R_m, kR_m, R_m *tendant vers l'infini avec* m, *ces* r *formant des intervalles dont la somme des longueurs entre* R_m *et* kR_m *est au moins* $L(\varepsilon, \rho) R_m$. *Pour ces* r, *on a*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r, f)}{U(r)} > 0 \ , \qquad U(r) = r^{\rho(r)} \ ,$$

ρ (r) *étant un ordre précisé de la fonction considérée* [17].

En suivant une méthode analogue, on montre que, pour une fonction $f(z)$, d'ordre $\rho < 1$, il existe des r aussi grands que l'on veut pour lesquels

$$\log |f(z)| > (\pi\rho \cot(\pi\rho) - \varepsilon) N(r, 0) \ , \qquad |z| = r$$

et des r aussi grands que l'on veut, tels que

$$N(r, 0) > \left(\frac{\sin(\pi\rho)}{\pi\rho} - \varepsilon\right) \log M(r, f) \ ,$$

ε étant donné arbitrairement petit positif, et on a des compléments analogues à l'énoncé II.

V. Exemples de fonctions d'ordre nul.

27. *Fonctions solutions d'équations différentielles.*

Wiman a montré que les fonctions entières, ou plus généralement les fonctions de la forme $y = z^{\mu} f(z)$, où $f(z)$ est une fonction entière, qui vérifient une équation différentielle algébrique du premier ordre, $\Phi(z, y, y') = 0$ où Φ est un polynôme à trois variables, sont nécessairement d'ordre fini positif, d'ordre précisé $\rho + \frac{a}{\log r}$ et parfaitement régulières par rapport à cet ordre [18]. Mais il existe des fonctions d'ordre nul vérifiant des équations d'ordre supérieur au premier. Partons de la fonction de Jacobi,

$$S(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} z^n = A \prod_{0}^{\infty} (1 + z q^{2n+1}) \left(1 + \frac{q^{2n+1}}{z}\right) , \qquad |q| < 1 \ ,$$

(A est une constante) et posons

$$Z(z) = z\frac{S'(z)}{S(z)}, \qquad P(z) = -zZ'(z),$$

nous avons

$$z^2 P'(z)^2 = 4(P + c)^3 - G_2(P + c) - G_3,$$

c, G_2, G_3 étant des constantes qui dépendent de q. Il s'ensuit que $S(z)$ est solution d'une équation différentielle du troisième ordre, algébrique. Mais, si l'on pose

$$z + \frac{1}{z} = u, \qquad S(z) = F(u),$$

$F(u)$ est une fonction entière d'ordre nul,

$$F(u) = C\prod_0^\infty \left(1 + \frac{u\, q^{2n+1}}{1 + q^{4n+2}}\right) \tag{24}$$

qui est solution d'une équation différentielle algébrique du troisième ordre. Pour cette fonction $F(u)$, on a

$$\log M(r, F) \sim \frac{(\log r)^2}{-4 \log |q|}.$$

On peut déduire de là d'autres fonctions d'ordre nul vérifiant des équations différentielles algébriques. Tout d'abord en faisant le changement de variables $u = \theta(z)$ où θ est un polynôme; les fonctions obtenues satisferont encore à la condition (22) du nº 21. On obtiendra des fonctions à croissance plus rapide en prenant

$$G(z) = F(F(z)).$$

D'après la condition (24), il existe une courbe fermée Γ_R entourant l'origine sur laquelle

$$\log |F(z)| = \frac{(\log R)^2}{-4 \log |q|},$$

si grand que soit R donné, et les valeurs de $r = |z|$ vérifiant la condition

$$\log r = (1 + o(1)) \log R.$$

La courbe Γ_R étant courbe de module constant de $F(z)$, l'argument de $F(z)$ varie de $2\pi n_R$, n_R étant le nombre de zéros de $F(z)$

intérieurs à Γ_R, lorsqu'on fait un tour sur Γ_R dans le sens direct, il existe donc sur Γ_R des points en lesquels l'argument de $u = F(z)$ est tel que

$$|F(u)| = M(|u|, F), \qquad \log |F u| = \frac{(\log R)^2}{-4 \log q}.$$

Il s'ensuit que

$$\log M(r, G) \sim \frac{(\log |u|)^2}{-4 \log q} \sim \frac{(\log r)^4}{(-4 \log q)^3}.$$

La fonction G vérifie une équation différentielle du sixième ordre déduite de celle de $F = y$. On a $\Phi(y, y', y'', y''', z) = 0$, de

$$G' = y'(F)\, y', \quad G'' = y''(F)\, y'^2 + y'(F)\, y'', \quad G''' = y'''(F)\, y'^3 + \ldots$$

on tire $y'''(F)$, $y''(F)$, $y'(F)$ et en portant dans $\Phi(G, y'(F), y''(F), y'''(F), F) = 0$, on obtient $\Psi(G, G', G'', G''', F, F', F'', F''') = 0$ avec $\Phi(F, F', F'', F''', z) = 0$. On peut éliminer F''' ce qui donne $\mu(G, G', G'', G''', F, F', F'', z) = 0$; on dérive et on élimine F'''; et on recommence deux fois; on a trois équations $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\rho = 0$ contenant F, F', F'' qu'on élimine.

On peut évidemment continuer ce procédé.

Existe-il des fonctions entières d'ordre nul vérifiant des équations différentielles algébriques du second ordre ? Il n'en existe pas pour lesquelles

$$\frac{\log M(r)}{(\log r)(\log_2 r)} < \frac{1}{\log 4}. \qquad {}^{19)}$$

Mais cette borne est-elle bonne ?

28. *Fonctions entières d'ordre nul vérifiant des équations fonctionnelles.*

Considérons l'équation de Poincaré

$$f(zs) = P_0(z)\, f(z) + P_1(z), \qquad |s| > 1,$$

où $P_0(z)$ et $P_1(z)$ sont des polynômes. Elle admet une solution entière sous la seule réserve que le calcul formel des coefficients du développement taylorien soit possible. Si l'on pose $P_0(z) = c_0 z^q + \ldots$, $|c_0| = C$, on a

$$\mathrm{M}(r\mathrm{S}, f) = \left(1 + \frac{\mathrm{O}(1)}{r}\right) \mathrm{A}\, r^q \,\mathrm{M}(r, f)\,, \qquad \mathrm{S} = |1|\,.$$

En itérant, on obtient

$$\log \mathrm{M}(\mathrm{S}^n r_0, f) = q \frac{n(n-1)}{2} \log \mathrm{S} + n \log (\mathrm{A}\, r_0^q) + \mathrm{O}(1)\,;$$

il s'ensuit que

$$\log \mathrm{M}(r, f) \sim \frac{q}{2 \log \mathrm{S}} (\log r)^2\,.$$

De même, la méthode des fonctions majorantes montre que l'équation

$$f'(zs) = \mathrm{P}(z, f(z))\,, \qquad |s| > 1\,,$$

admet une solution entière prenant une valeur donnée à l'origine; lorsque le second membre est du premier degré en $f(z)$, ces fonctions entières sont d'ordre nul.

Dans d'autres cas, les solutions d'équations fonctionnelles, si elles existent, ne peuvent être que des fonctions d'ordre nul. Par exemple, si l'équation

$$[f'(\mathrm{Q}(z))]^m = \mathrm{R}(z, f(z))$$

où $\mathrm{Q}(z)$ est un polynôme de degré q et R une fraction rationnelle de degré p par rapport à $f(z)$, ne peut avoir de solution méromorphe que si $p \geqslant mq$; et si une telle solution existe, c'est une fonction méromorphe d'ordre nul (quotient de deux fonctions entières d'ordre nul) [20)].

Soit encore la fonction entière

$$\mathrm{F}(z; a) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a^{2n}}\right), \qquad |a| > 1\,,$$

qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\varphi(z^2) = \left(1 - \frac{z^2}{a}\right) \varphi(z)\, \varphi(-z)\,,$$

et qui est à croissance très lente. La recherche de la solution méromorphe générale de cette équation fonctionnelle est ramenée à la résolution de

$$\varphi(z^2) = \varphi(z)\, \varphi(-z)\,. \text{ [21)]}$$

(A suivre).