

V. Exemples de fonctions d'ordre nul.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Par suite

II. Si l'ordre ρ est inférieur à $\frac{1}{2}$, à $\varepsilon > 0$ correspond un nombre k tel que l'inégalité (21) a lieu pour des r appartenant à une suite d'intervalles R_m, kR_m, R_m tendant vers l'infini avec m , ces r formant des intervalles dont la somme des longueurs entre R_m et kR_m est au moins $L(\varepsilon, \rho) R_m$. Pour ces r , on a

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r, f)}{U(r)} > 0, \quad U(r) = r^{\rho(r)},$$

$\rho(r)$ étant un ordre précisé de la fonction considérée ¹⁷⁾.

En suivant une méthode analogue, on montre que, pour une fonction $f(z)$, d'ordre $\rho < 1$, il existe des r aussi grands que l'on veut pour lesquels

$$\log |f(z)| > (\pi\rho \cot(\pi\rho) - \varepsilon) N(r, 0), \quad |z| = r$$

et des r aussi grands que l'on veut, tels que

$$N(r, 0) > \left(\frac{\sin(\pi\rho)}{\pi\rho} - \varepsilon \right) \log M(r, f),$$

ε étant donné arbitrairement petit positif, et on a des compléments analogues à l'énoncé II.

V. EXEMPLES DE FONCTIONS D'ORDRE NUL.

27. Fonctions solutions d'équations différentielles.

Wiman a montré que les fonctions entières, ou plus généralement les fonctions de la forme $y = z^\mu f(z)$, où $f(z)$ est une fonction entière, qui vérifient une équation différentielle algébrique du premier ordre, $\Phi(z, y, y') = 0$ où Φ est un polynôme à trois variables, sont nécessairement d'ordre fini positif, d'ordre précisé $\rho + \frac{a}{\log r}$ et parfaitement régulières par rapport à cet ordre ¹⁸⁾. Mais il existe des fonctions d'ordre nul vérifiant des équations d'ordre supérieur au premier. Partons de la fonction de Jacobi,

$$S(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} z^n = A \prod_0^{\infty} (1 + z q^{2n+1}) \left(1 + \frac{q^{2n+1}}{z} \right), \quad |q| < 1,$$

(A est une constante) et posons

$$Z(z) = z \frac{S'(z)}{S(z)}, \quad P(z) = -z Z'(z),$$

nous avons

$$z^2 P'(z)^2 = 4(P+c)^3 - G_2(P+c) - G_3,$$

c, G_2, G_3 étant des constantes qui dépendent de q . Il s'ensuit que $S(z)$ est solution d'une équation différentielle du troisième ordre, algébrique. Mais, si l'on pose

$$z + \frac{1}{z} = u, \quad S(z) = F(u),$$

$F(u)$ est une fonction entière d'ordre nul,

$$F(u) = C \prod_0^{\infty} \left(1 + \frac{u q^{2n+1}}{1 + q^{4n+2}} \right) \quad (24)$$

qui est solution d'une équation différentielle algébrique du troisième ordre. Pour cette fonction $F(u)$, on a

$$\log M(r, F) \sim \frac{(\log r)^2}{-4 \log |q|}.$$

On peut déduire de là d'autres fonctions d'ordre nul vérifiant des équations différentielles algébriques. Tout d'abord en faisant le changement de variables $u = \theta(z)$ où θ est un polynôme; les fonctions obtenues satisferont encore à la condition (22) du n° 21. On obtiendra des fonctions à croissance plus rapide en prenant

$$G(z) = F(F(z)).$$

D'après la condition (24), il existe une courbe fermée Γ_R entourant l'origine sur laquelle

$$\log |F(z)| = \frac{(\log R)^2}{-4 \log |q|},$$

si grand que soit R donné, et les valeurs de $r = |z|$ vérifiant la condition

$$\log r = (1 + o(1)) \log R.$$

La courbe Γ_R étant courbe de module constant de $F(z)$, l'argument de $F(z)$ varie de $2\pi n_R$, n_R étant le nombre de zéros de $F(z)$

intérieurs à Γ_R , lorsqu'on fait un tour sur Γ_R dans le sens direct, il existe donc sur Γ_R des points en lesquels l'argument de $u = F(z)$ est tel que

$$|F(u)| = M(|u|, F), \quad \log |F u| = \frac{(\log R)^2}{-4 \log q}.$$

Il s'ensuit que

$$\log M(r, G) \sim \frac{(\log |u|)^2}{-4 \log q} \sim \frac{(\log r)^4}{(-4 \log q)^3}.$$

La fonction G vérifie une équation différentielle du sixième ordre déduite de celle de $F = y$. On a $\Phi(y, y', y'', y''', z) = 0$, de

$$G' = y'(F) y', \quad G'' = y''(F) y'^2 + y'(F) y'', \quad G''' = y'''(F) y'^3 + \dots$$

on tire $y'''(F), y''(F), y'(F)$ et en portant dans $\Phi(G, y'(F), y''(F), y'''(F), F) = 0$, on obtient $\Psi(G, G', G'', G''', F, F', F'', F''') = 0$ avec $\Phi(F, F', F'', F''', z) = 0$. On peut éliminer F''' ce qui donne $\mu(G, G', G'', G''', F, F', F'', z) = 0$; on dérive et on élimine F''' ; et on recommence deux fois; on a trois équations $\mu = 0, \nu = 0, \rho = 0$ contenant F, F', F'' qu'on élimine.

On peut évidemment continuer ce procédé.

Existe-il des fonctions entières d'ordre nul vérifiant des équations différentielles algébriques du second ordre? Il n'en existe pas pour lesquelles

$$\frac{\log M(r)}{(\log r)(\log_2 r)} < \frac{1}{\log 4}. \quad 19)$$

Mais cette borne est-elle bonne?

28. *Fonctions entières d'ordre nul vérifiant des équations fonctionnelles.*

Considérons l'équation de Poincaré

$$f(zs) = P_0(z) f(z) + P_1(z), \quad |s| > 1,$$

où $P_0(z)$ et $P_1(z)$ sont des polynômes. Elle admet une solution entière sous la seule réserve que le calcul formel des coefficients du développement taylorien soit possible. Si l'on pose $P_0(z) = c_0 z^q + \dots, |c_0| = C$, on a

$$M(rS, f) = \left(1 + \frac{O(1)}{r}\right) A r^q M(r, f), \quad S = |1|.$$

En itérant, on obtient

$$\log M(S^n r_0, f) = q \frac{n(n-1)}{2} \log S + n \log(A r_0^q) + O(1);$$

il s'ensuit que

$$\log M(r, f) \sim \frac{q}{2 \log S} (\log r)^2.$$

De même, la méthode des fonctions majorantes montre que l'équation

$$f'(zs) = P(z, f(z)), \quad |s| > 1,$$

admet une solution entière prenant une valeur donnée à l'origine; lorsque le second membre est du premier degré en $f(z)$, ces fonctions entières sont d'ordre nul.

Dans d'autres cas, les solutions d'équations fonctionnelles, si elles existent, ne peuvent être que des fonctions d'ordre nul. Par exemple, si l'équation

$$[f'(Q(z))]^m = R(z, f(z))$$

où $Q(z)$ est un polynôme de degré q et R une fraction rationnelle de degré p par rapport à $f(z)$, ne peut avoir de solution méromorphe que si $p \geq mq$; et si une telle solution existe, c'est une fonction méromorphe d'ordre nul (quotient de deux fonctions entières d'ordre nul)²⁰⁾.

Soit encore la fonction entière

$$F(z; a) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a^{2n}}\right), \quad |a| > 1,$$

qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\varphi(z^2) = \left(1 - \frac{z^2}{a}\right) \varphi(z) \varphi(-z),$$

et qui est à croissance très lente. La recherche de la solution méromorphe générale de cette équation fonctionnelle est ramenée à la résolution de

$$\varphi(z^2) = \varphi(z) \varphi(-z). \quad ^{21)}$$

(A suivre).