4. Weitere Anwendungsbeispiele.

und w. Natürlich läßt sich das auch durch Einsetzen nachprüfen. Außerdem liegt auch der Punkt $t = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ auf der WALLACE-Geraden. Hier ist $\frac{1}{2}(a + b + c)$ der Mittelpunkt des zum Dreieck (a, b, c) gehörigen FEUERBACH-Kreises; an ihn ist noch der Vektor $\frac{d}{2}$ der Länge $\frac{1}{2}$ angesetzt. Folglich liegt t auf diesem FEUERBACH-Kreis, aber nicht nur auf ihm, sondern auch auf den FEUERBACH-Kreisen der Dreiecke (b, c, d), (c, a, d), (a, b, d).

Wird in einem Sehnenviereck zu jeder Ecke die WALLACE-*Gerade hinsichtlich des Dreiecks der drei anderen Ecken bestimmt, dann gehen die vier so entstehenden Geraden durch einen und den nämlichen Punkt, nämlich durch den gemeinsamen Schnittpunkt der* FEUERBACH-*Kreise dieser vier Dreiecke*[8].

4. WEITERE ANWENDUNGSBEISPIELE.

(4, 1) Wir behaupten:

Die bez. Parallelen zu den inneren Winkelhalbierenden eines Dreiecks durch dessen Seitenmitten schneiden sich in einem Punkt.

Wie am Ende von (2, 2) bezeichnen wir die Ecken des Dreiecks im Einheitskreis mit p^2, q^2, r^2. Folglich sind die Mitten der Gegenbögen zu den Ecken auf dem Einheitskreis $(-qr)$, $(-rp)$, $(-pq)$ zu nennen. Die innere Halbierende des Winkels (q^2, p^2, r^2) geht durch p^2 und $(-qr)$; sie hat also den Richtungsteil $z - p^2 qr\bar{z}$. Die Parallele zu dieser Winkelhalbierenden durch den Seitenmittelpunkt $\frac{1}{2}(q^2 + r^2)$ hat die Gleichung $z - p^2 qr\bar{z} = \frac{1}{2}\left(q^2 + r^2 - p^2 \cdot \frac{r}{q} - p^2 \cdot \frac{q}{r}\right)$. Entsprechend:

$$z - pq^2 r\bar{z} = \frac{1}{2}\left(p^2 + r^2 - q^2 \cdot \frac{r}{p} - q^2 \cdot \frac{p}{r}\right) .$$

Indem wir die mit q multiplizierte erste Gleichung von der mit p multiplizierten zweiten subtrahieren und mit $p - q$ dividieren, erhalten wir

$$z = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2 + qr + rp + pq) .$$

[8]) Aufgabe von É. LEMOINE in den *Nouv. annal.* (2). *8*, 1867, 47.

Dieser Ausdruck ist in p, q, r symmetrisch aufgebaut; folglich liegt z auf allen drei Parallelen zu den Winkelhalbierenden.

Für die Konstruktion spiegeln wir den Inkreismittelpunkt $i = -(qr + rp + pq)$ am Umkreismittelpunkt O in $j = -i$; dann liegt z in der Mitte zwischen j und dem Höhenschnittpunkt $d = p^2 + q^2 + r^2$ des Dreiecks. Ähnliche Beziehungen gelten auch im Zusammenspiel mit *äußeren* Winkelhalbierenden.

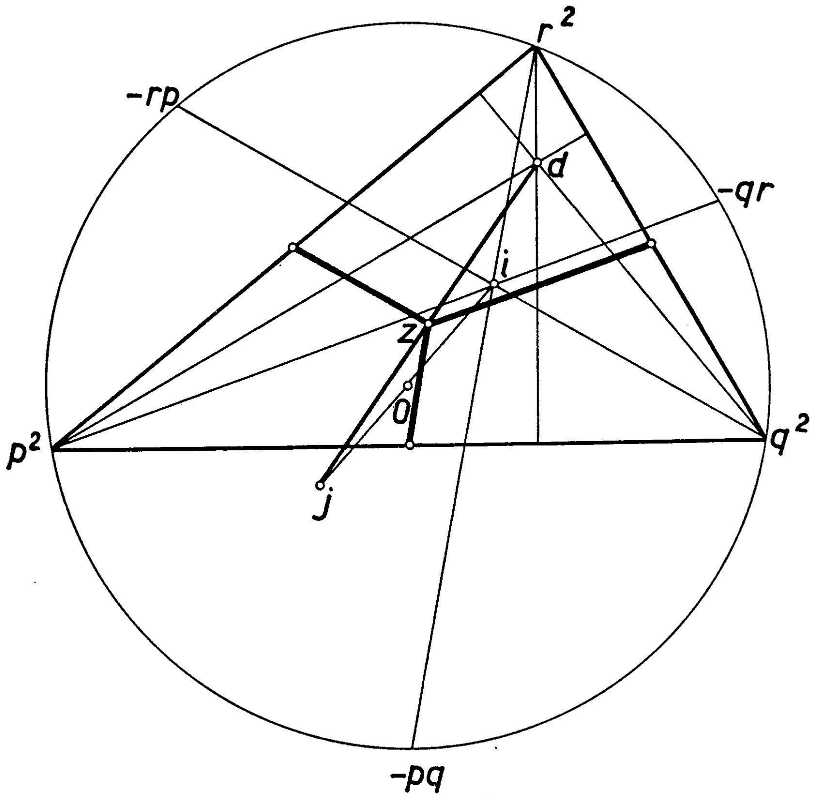

Abb. 9.
Drei Gerade, die durch einen Punkt gehen.

(4, 2) In einer erst seit 1927 wieder in arabischer Bearbeitung zugänglich gewordenen ARCHIMEDischen Abhandlung [9] findet sich der folgende Satz, der mit dem Additionstheorem der trigonometrischen Funktionen gleichwertig ist:

Auf dem Einheitskreis befinden sich vier Punkte a, b, c, d *dergestalt, daß* d *die Mitte des Bogens* $\widehat{\text{abc}}$ *ist. Dann halbiert das*

[9]) C. SCHOY, *Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen al-Bîrûnî...*, ed. J. Ruska/H. Wieleitner, Hannover 1927, 3. Zur Bedeutung der ARCHIMEDischen Prämisse vgl. J. TROPFKE im *Archiv f. Geschichte d. Math., d. Nat. u. d. Technik* 10, 1928, 430/62, insbesondere 433/36.

Lot aus d *auf die längere der Sehnen* (a, b) *und* (b, c) *die Länge der Sehnensumme* $|\,a, b\,| + |\,b, c\,|$ (Abb. 10).

Es sei etwa $|\,a, b\,| > |\,b, c\,|$. Weil d den Bogen $\widehat{abc}$ halbiert, ist $c = \dfrac{d^2}{a}$. Verlängern wir die Sehne (a, b) über b hinaus um die Sehne (b, c) bis z, dann ist (z, c) parallel zur inneren Halbierenden $(b, -d)$ des Winkels (a, b, c). Das Lot aus d auf (a, b)

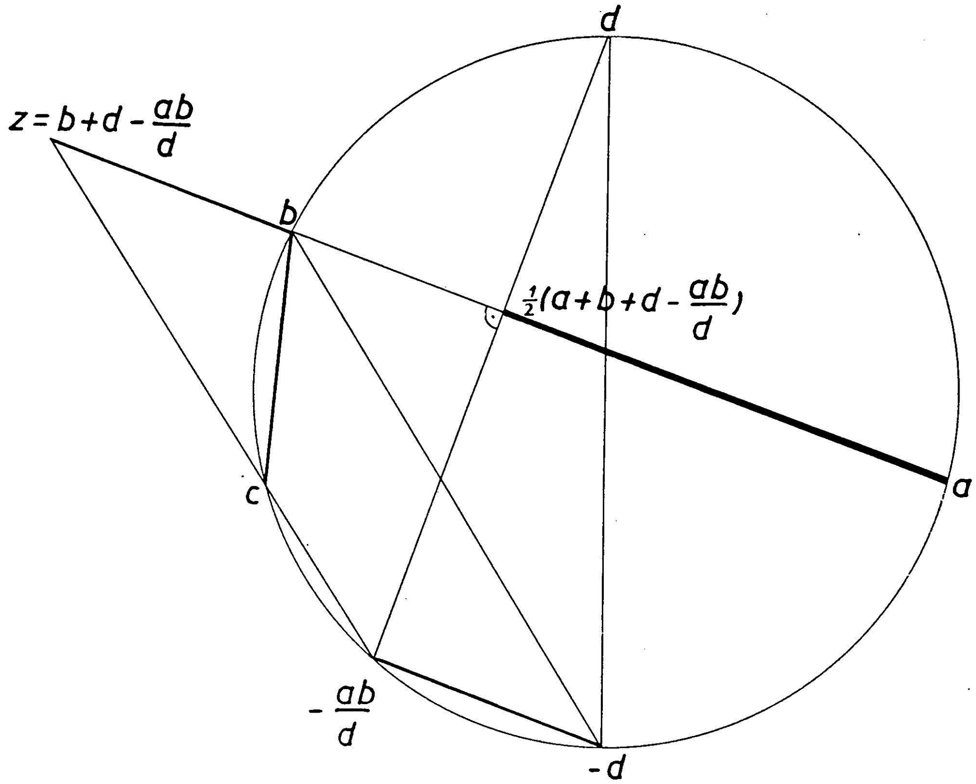

Abb. 10.
Zur Archimedischen Prämisse.

trifft den Kreis nochmals in $\left(-\dfrac{ab}{d}\right)$. Weil die Sehnen (b, c) und $\left(-d, -\dfrac{ab}{d}\right)$ zwischen Parallelsehnen des Kreises liegen, sind sie gleichlang. Weil ferner $\left(-\dfrac{ab}{d}, -d, b, z\right)$ ein Parallelogramm ist, ist $z - b = -\dfrac{ab}{d} + d$; also $z = b + d - \dfrac{ab}{d}$. Folglich ist $\dfrac{a+z}{2} = \dfrac{1}{2}\left(a + b + d - \dfrac{ab}{d}\right)$ der Mittelpunkt der Strecke $(a, z) = (a, b) + (b, z) = (a, b) + (b, c)$. Dieser Punkt ist nach (2, 2) auch der Fußpunkt des Lotes aus d auf (a, b). Damit ist der Satz, die sog. Archimedische Prämisse, bewiesen.

(4, 3) Sind a, b, c die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks im Einheitskreis und wird das Dreieck im Gegenuhrzeigersinn umlaufen, dann ist $b = a\varepsilon$, $c = a\varepsilon^2$, wobei $\varepsilon = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$, $\varepsilon^2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3}) = \bar{\varepsilon}$ die dritten Einheitswurzeln sind. Sind nun u, v zwei beliebige Punkte der komplexen Ebene, dann

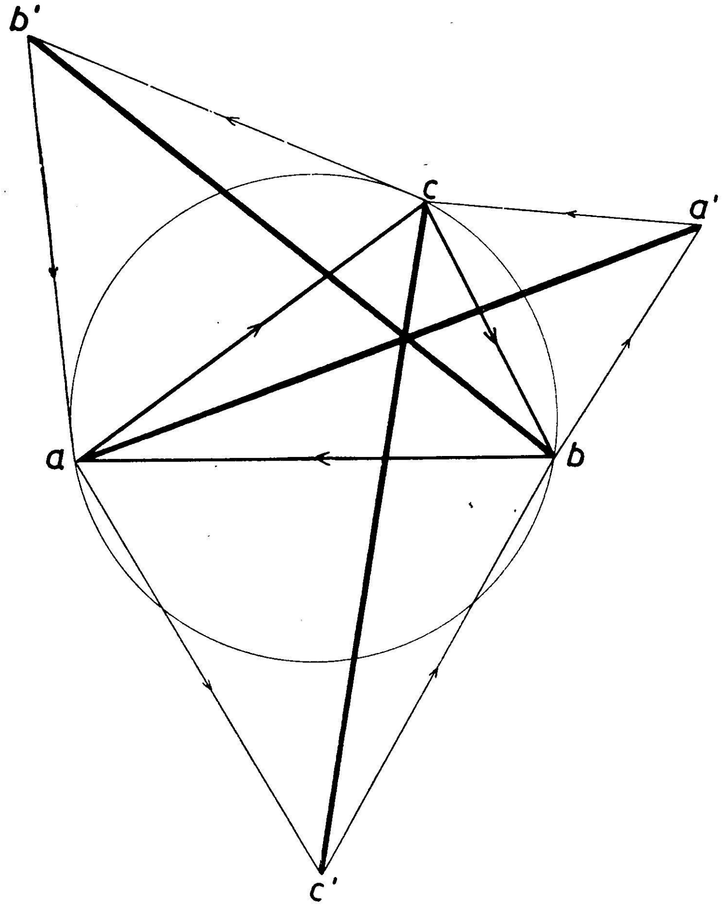

Abb. 11.
Vom isoptischen Punkt des Dreiecks.

werden sie durch jenen Punkt w zu einem im Gegenuhrzeigersinn umlaufenen gleichseitigen Dreieck ergänzt, für den

$$\boxed{u + \varepsilon v + \varepsilon^2 w = 0}$$

ist.

Wir geben ein im Uhrzeigersinn umlaufenes Dreieck (a, b, c) im Einheitskreis und errichten über seinen Seiten nach außen gleichseitige Dreiecke (Abb. 11). Deren freie Ecken a', b', c' müssen bezw. mit (c, b), (a, c), (b, a) zusammengenommen werden, damit wir im Gegenuhrzeigersinn umlaufene gleichseitige Dreiecke erhalten, auf die wir die obige Formel anwenden können. Es ergibt sich

$$\begin{cases} a' = -\varepsilon^2 b - \varepsilon c\,, \\ b' = -\varepsilon^2 c - \varepsilon a\,, \\ c' = -\varepsilon^2 a - \varepsilon b\,, \end{cases} \quad \text{also} \quad \begin{cases} a - a' = a + \varepsilon^2 b + \varepsilon c = t\,, \\ b - b' = b + \varepsilon^2 c + \varepsilon a = t\varepsilon\,, \\ c - c' = c + \varepsilon^2 a + \varepsilon b = t\varepsilon^2\,. \end{cases}$$

Daraus folgt, daß die Vektoren $(a - a')$, $(b - b')$, $(c - c')$ gleichlang sind und je zu zweit den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ einschließen.

Die Parallele zur Geraden (a, a') durch den Ursprung schneidet den Einheitskreis in den Punkten $\frac{t}{|t|}$ und $-\frac{t}{|t|}$; also ist das Richtungsmaß dieser Geraden gleich $-\frac{t^2}{|t|^2} = -\frac{t}{\overline{t}}$ und die Gleichung der Geraden

$$(a, a') \text{ gleich } \overline{t}\,(z - a) = t\,(\overline{z} - \overline{a})\,;$$

entsprechend die Gleichung von

$$(b, b') \text{ gleich } \varepsilon^2 \overline{t}\,(z - b) = \varepsilon t\,(\overline{z} - \overline{b})$$

und die Gleichung von

$$(c, c') \text{ gleich } \varepsilon \overline{t}\,(z - c) = \varepsilon^2 t\,(\overline{z} - \overline{c})\,.$$

Werden diese drei Gleichungen addiert, dann ergibt sich auf beiden Seiten Null; also ist die dritte Gleichung eine Folge der beiden vorhergehenden, und somit gehen die drei Geraden durch den nämlichen Punkt z, den sog. *isoptischen* Punkt des Dreiecks [10]. Er liegt *innerhalb* des Dreiecks, wenn jeder der drei Winkel kleiner als $\frac{2\pi}{3}$ ist.

(4, 4) *Wenn wir die inneren Winkeldrittelnden eines Dreiecks nächst den Seiten zum Schnitt bringen, dann erhalten wir die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks.*

Um diesen interessanten Satz zu erweisen, der eine ganze Literatur hervorgebracht hat [11], bezeichnen wir die Ecken des

10) Der isoptische Punkt ist im Zusammenhang mit der Aufgabe FERMATS für TORRICELLI (P. DE FERMAT, *Œuvres* I, ed. P. Tannery-Ch. Henry, Paris 1891, 153; vgl. *Œuvres* V, ed. C. de Waard, Paris 1922, 127/28 und E. TORRICELLI, *Opere* III, ed. G. Vassura, Faenza 1919, 425/31) von TORRICELLI entdeckt worden.

11) Der Satz wurde 1904 von Fr. MORLEY brieflich an Freunde in England gegeben. Er findet sich erstmals gedruckt in W. L. MUIR, *Morley's Trisections Theorem*, Proceedings Edinburgh Math. Soc. *32*, 1913.

Dreiecks im Einheitskreis mit a^3, b^3, c^3 und die Drittelnden des Bogens (b^3, c^3), der a^3 nicht enthält, mit $b^2 c$ und bc^2, ferner die Drittelnden des Bogens (c^3, a^3), der b^3 nicht enthält, mit $c^2 a$ und ca^2 (Abb. 12). Ist t der Drittelpunkt des dritten Bogens nächst a^3, dann ist

$$\frac{t}{a^3} \cdot \frac{b^2 c}{b^3} \cdot \frac{c^2 a}{c^3} = \varepsilon \text{ ,}$$

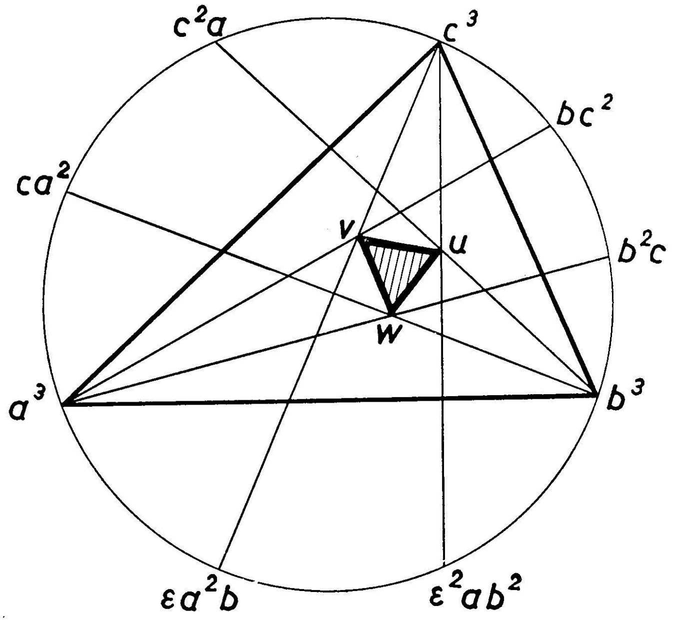

Abb. 12.
Zum Morleyschen Satz.

also $t = \varepsilon\, a^2\, b$. Der andere bogendrittelnde Punkt ist also $\varepsilon^2\, ab^2$. Der Schnittpunkt w der Winkeldrittelnden nächst (a^3, b^3) ergibt sich aus dem Gleichungspaar

$$\begin{cases} w + a^3\, b^2\, c\bar{w} = a^3 + b^2\, c \text{ ,} \\ w + a^2\, b^3\, c\bar{w} = b^3 + a^2\, c \text{ .} \end{cases}$$

Wir entfernen $\bar{w}$ und kürzen mit $a - b$. So finden wir

$$\begin{cases} w = -\, ab\,(a + b) + c\,(a^2 + ab + b^2) \text{ und entsprechend} \\ u = -\, \varepsilon bc\,(\varepsilon b + c) + a\,(\varepsilon^2\, b^2 + \varepsilon bc + c^2) \text{ ,} \\ v = -\, \varepsilon ca\,(\varepsilon c + a) + \varepsilon b\,(\varepsilon^2\, c^2 + \varepsilon ac + a^2) \text{ .} \end{cases}$$

Jetzt ist $u + \varepsilon\, v + \varepsilon^2\, w = abc\,(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = 0$; also ist ($u$, v, w) wirklich ein gleichseitiges Dreieck.