

5. Von der Pfeillänge.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

5. VON DER PFEILLÄNGE.

(5, 1) Sind p und q zwei Punkte auf dem Umfang des Einheitskreises, dann ist das Quadrat ihres Abstandes bestimmt aus

$$|q - p|^2 = (q - p)(\bar{q} - \bar{p}) = \frac{(q - p)^2}{-pq}.$$

Folglich ist

$$|q - p| = \frac{q - p}{\sqrt{-pq}} = \left| \overrightarrow{p, q} \right|$$

das mit Vorzeichen behaftete reelle Längenmaß der Sehne $\overrightarrow{p, q}$. Es ändert sein Zeichen, wenn p und q vertauscht werden.

5, 2) Ordnen wir nunmehr den Ecken eines Sehnendreiecks im Einheitskreis wie am Ende von (2, 3) die Zahlen a^2, b^2, c^2 zu, dann ist der Mittelpunkt des FEUERBACH-Kreises bestimmt aus

$$\frac{d}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

und der Inkreismittelpunkt aus $i = -(bc + ca + ab)$. Also ist

$$\frac{d}{2} - i = \frac{(a + b + c)^2}{2}; \quad \left| \frac{d}{2} - i \right| = \frac{(a + b + c)(bc + ca + ab)}{2abc}.$$

Um das Längenmaß des Inkreishalbmessers zu bestimmen, fällen wir auf die Sehne (a^2, b^2) , nämlich $z + a^2 b^2 \bar{z} = a^2 + b^2$ (vgl. 3, 2), das Lot aus i . Seine Gleichung hat den Richtungsteil $z - a^2 b^2 \bar{z}$ und das absolute Glied $i - a^2 b^2 \bar{i} = \frac{(ab - c^2)(a + b)}{c}$. Indem wir \bar{z} durch Addieren aus den beiden Geradengleichungen entfernen, erhalten wir nach leichter Umformung

$$z - i = \frac{(b + c)(c + a)(a + b)}{2c} \quad \text{und} \quad \rho = \pm \frac{(b + c)(c + a)(a + b)}{2abc}.$$

Außerdem ist $r = 1$. Andererseits ist

$$i^2 = \frac{(a + b + c)(bc + ca + ab)}{abc} = 1 + \frac{(b + c)(c + a)(a + b)}{abc} = r^2 \pm 2r\rho.$$

Da aber der Inkreismittelpunkt vom Umkreismittelpunkt nicht weiter als höchstens um r abstehen kann, trifft das Zeichen $+$ für ρ nicht zu. Es verbleibt die Beziehung von CHAPPLE-EULER ¹²⁾

$$|i|^2 = r^2 - 2r\rho$$

Wird jedoch aus dem Inkreis einer der *Ankreise*, dann ist $2r\rho_k$ mit dem *positiven* Zeichen zu nehmen. Weiterhin erhalten wir

$$\left| \frac{d}{2} - i \right| = \frac{r}{2} - \rho \geq 0$$

Somit berührt der *Inkreis* den FEUERBACH-Kreis von *innen* und wird ganz von diesem *umschlossen*. Entsprechend: Die *Ankreise* berühren den FEUERBACH-Kreis von *außen* ¹³⁾.

(5, 3) Außerdem ergibt sich ähnlich wie vorhin

$$\rho_a = - \frac{(b+c)(b-a)(c-a)}{2abc} \text{ usw.}$$

Daraus folgt nach einfacher Rechnung die nach STEINER ¹⁴⁾ benannte Beziehung

$$\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho = 4r$$

Der Mittelpunkt der Dreieckseite (a^2, b^2) ist $\frac{a^2 + b^2}{2}$. Folglich ist der mit Vorzeichen behaftete Abstand des Umkreismittelpunktes von dieser Seite gleich $\pm \frac{a^2 + b^2}{2ab}$. Also ist die Abstandsumme des Umkreismittelpunktes von den drei Seiten des Dreiecks gleich

$$\begin{aligned} \pm \frac{(a^2 + b^2)c + (b^2 + c^2)a + (c^2 + a^2)b}{2abc} = \\ \pm \frac{(b+c)(c+a)(a+b) - 2abc}{2abc} = \pm (r + \rho). \end{aligned}$$

¹²⁾ W. CHAPPLE in den *Miscellanea curiosa mathematica*, 1, 1746, 123 (zitiert nach SIMON ¹⁾, 140).

¹³⁾ EULER ²⁾ hat zwar die Berechnung von $|i|^2$, aber noch nicht die Form $r^2 - 2r\rho$.

¹⁴⁾ Der Satz stammt in Wirklichkeit von FEUERBACH ¹⁾, 4, wird jedoch in der neueren Literatur stets nach STEINER benannt, so z.B. bei DÖRRIE ³⁾, 59/60. Dort fehlt jedoch der Hinweis darauf, daß die *algebraische* Summe zu nehmen ist.

Also ist die Abstandsumme des Umkreismittelpunktes von den Dreieckseiten gleich $r + \rho$, wenn das Dreieck *spitzwinklig* oder *rechtwinklig* ist. Im *stumpfwinkligen* Dreieck muß der Abstand von der längsten Dreieckseite von der Abstandsumme der beiden anderen *abgezogen* werden. Also ist $r + \rho$ gleich der *algebraischen* Abstandsumme des Umkreismittelpunktes von den Dreieckseiten.

(5, 4) Ist \mathfrak{U} der Umkreis und \mathfrak{I} der Inkreis eines Dreiecks, so gibt es ∞^1 weitere Dreiecke, die \mathfrak{U} zum Umkreis und \mathfrak{I} zum Inkreis haben. Die FEUERBACH-Kreise dieser Dreiecke haben stets den festen Halbmesser $\frac{r}{2}$; sie berühren den Inkreis umschließend von innen. Während sich das Dreieck in \mathfrak{U} um \mathfrak{I} bewegt, rollt der FEUERBACH-Kreis um den festen Inkreis herum. Sein Mittelpunkt hat von i den festen Abstand $\frac{r}{2} - \rho$, wandert also auf einem zum Inkreis konzentrischen. Auch der Höhenschnittpunkt des Dreiecks wandert auf einem Kreis; dessen Mittelpunkt ist der Spiegelpunkt $2i$ des Umkreismittelpunktes O an i , sein Halbmesser gleich $r - 2\rho$.

Entsprechendes gilt auch für die FEUERBACH-Kreise und die Höhenschnittpunkte jener Dreiecke im Umkreis \mathfrak{U} , die außerdem einen passenden Kreis zum Ankreis haben.

Ähnliches gilt auch für die Beziehungen der ∞^1 Inkreise bzw. Ankreise der Dreiecke, die wie in (1, 4) den nämlichen Umkreis und FEUERBACH-Kreis haben; allerdings ändert diesmal ρ fortwährend seine Grösse.

(5, 5) *Die Fußpunkte der Lote aus den Ecken eines Dreiecks auf dessen äußere Winkelhalbierenden liegen auf einem Kreis* ¹⁵⁾ (Abb. 13).

Diese Behauptung hängt mit jener von (4, 1) zusammen. Sie ist nämlich gleichwertig mit der folgenden: Die fraglichen sechs Punkte sind vom Schnittpunkt $m = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2 + qr + rp + pq)$ der Parallelen zu den inneren Winkelhalbierenden des Dreiecks durch dessen Seitenmitten gleichweit entfernt.

¹⁵⁾ Satz von EUTARIS (Pseudonym für RESTIAU) in H. VUIBERT, *Journ. Math. Élément.* (Brüssel), November 1877, zitiert nach SIMON ¹⁾, 135.

Zum Nachweis schneiden wir die äußere Winkelhalbierende

$$z + p^2 q r \bar{z} = p^2 + q r$$

mit dem Lot aus q^2 auf sie, nämlich

$$z - p^2 q r \bar{z} = q^2 - \frac{p^2 r}{q}.$$

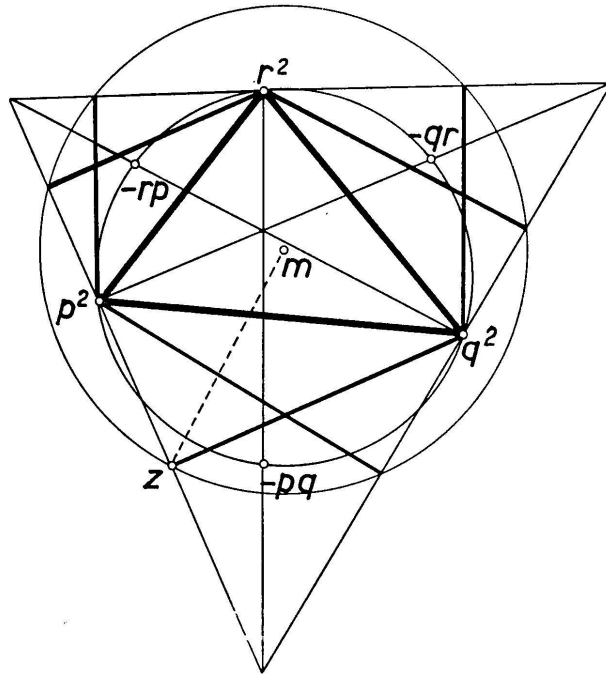


Abb. 13.

Ein Sechspunktekreis.

Wir erhalten

$$z = \frac{1}{2} \left(p^2 + q^2 + q r - p^2 \cdot \frac{r}{q} \right),$$

also

$$m - z = \frac{p q^2 + q r^2 + r p^2 + p q r}{2 q}$$

und

$$|m - z|^2 = \frac{(p q^2 + q r^2 + r p^2 + p q r) (p^2 q + q^2 r + r^2 p + p q r)}{4 p^2 q^2 r^2}.$$

Dieser Ausdruck ist in p, q, r symmetrisch. Damit ist alles bewiesen. Natürlich lässt sich auch dieser Satz unter Hinzunahme äußerer und innerer Winkelhalbierender zweckmäßig variieren.

(5, 6) Etwas schwieriger und auf andere Weise schwerlich einer einfachen Behandlung zugänglich ist die folgende Frage ¹⁶⁾:

¹⁶⁾ Problem von EULER ³⁾, Opera a.a.0., 150/51. Vgl. DÖRRIE ³⁾, 20/26.

Von welcher Art ist das Problem, ein Dreieck aus dem Inkreis-
mittelpunkt, dem Umkreismittelpunkt und dem Höhenschnittpunkt
zu bestimmen?

Machen wir den Umkreismittelpunkt zum Ursprung, so ist
der Inkreismitelpunkt aus i , der Höhenschnittpunkt aus d
bestimmt. Wir ermitteln $2i$ und kennen $|i|^2 = r(r - 2\rho)$ und
 $|d - 2i| = r - 2\rho$, also auch r und ρ , beides mit Zirkel und
Lineal konstruierbar. Machen wir r zur Längeneinheit, dann ist

$$a + b + c = \sqrt{d - 2i},$$

$$bc + ca + ab = -i,$$

$$abc = \frac{(a + b + c)(bc + ca + ab)}{|i|^2} = -\frac{\sqrt{d - 2i}}{i}$$

und

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = d, \\ b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2 = i^2 + \frac{2(d - 2i)}{i} \\ a^2 b^2 c^2 = \frac{d - 2i}{i^2}. \end{array} \right.$$

Es liegt ein Problem dritten Grades vor; die Ecken des Dreiecks
auf dem Umkreis ergeben sich als die Lösungen der kubischen
Gleichung

$$z^3 - dz^2 + \left[i^2 + \frac{2(d - 2i)}{i} \right] z - \frac{d - 2i}{i^2} = 0.$$

Da die Koeffizienten dieser Gleichung aus d und i rational her-
gestellt werden können, ist das Dreieck eindeutig bestimmt.

6. VON DEN TANGENTEN.

6, 1) Lassen wir in der Geradengleichung von (3, 2) den
Punkt b auf dem Einheitskreis gegen a hinrücken, dann erhalten
wir die Gleichung der Tangente an den Einheitskreis in a in der
Form:

$$\boxed{z + a^2 \bar{z} = 2a}.$$