6. Von den Tangenten.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Von welcher Art ist das Problem, ein Dreieck aus dem Inkreismittelpunkt, dem Umkreismittelpunkt und dem Höhenschnittpunkt zu bestimmen ?

Machen wir den Umkreismittelpunkt zum Ursprung, so ist der Inkreismittelpunkt aus i, der Höhenschnittpunkt aus d bestimmt. Wir ermitteln $2i$ und kennen $|i|^2 = r(r - 2\rho)$ und $|d - 2i| = r - 2\rho$, also auch r und ρ, beides mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Machen wir r zur Längeneinheit, dann ist

$$a + b + c = \sqrt{d - 2i}\,,$$

$$bc + ca + ab = -i\,,$$

$$abc = \frac{(a + b + c)(bc + ca + ab)}{|i|^2} = -\frac{\sqrt{d - 2i}}{\bar{i}}$$

und

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = d\,, \\ b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = i^2 + \dfrac{2(d - 2i)}{\bar{i}} \\ a^2b^2c^2 = \dfrac{d - 2i}{\bar{i}^2}\,. \end{cases}$$

Es liegt ein Problem dritten Grades vor; die Ecken des Dreiecks auf dem Umkreis ergeben sich als die Lösungen der kubischen Gleichung

$$z^3 - dz^2 + \left[i^2 + \frac{2(d - 2i)}{\bar{i}}\right] z - \frac{d - 2i}{\bar{i}^2} = 0\,.$$

Da die Koeffizienten dieser Gleichung aus d und i rational hergestellt werden können, ist das Dreieck eindeutig bestimmt.

6. Von den Tangenten.

6, 1) Lassen wir in der Geradengleichung von (3, 2) den Punkt b auf dem Einheitskreis gegen a hinrücken, dann erhalten wir die Gleichung der Tangente an den Einheitskreis in a in der Form:

$$\boxed{z + a^2\bar{z} = 2a}\,.$$

Darnach schneiden sich die Tangenten an den Einheitskreis in dessen Umfangspunkten a und b im Punkt $z = \frac{2ab}{a+b}$. Außerdem ist z das inverse Bild des Sehnenmittelpunktes $\frac{a+b}{2}$.

Hieraus geht durch Division mit a die *Polarengleichung* $\bar{a}z + a\bar{z} = 2$ hinsichtlich des Einheitskreises hervor. Ist a ein *beliebiger* Punkt der Ebene, dann stellt diese Gleichung die Polare des Punktes a hinsichtlich des Einheitskreises dar. Ist umgekehrt $pz + q\bar{z} = r$ die Gleichung einer Geraden, die nicht durch den Ursprung geht $(r \neq 0)$, dann wird sie nach Multiplikation mit $\frac{2}{r}$ zur Polarengleichung. Da rechts etwas Reelles herauskommt, müssen die Faktoren bei z und $\bar{z}$ konjugiert komplex sein; der Faktor $\frac{2q}{r} = a$ kennzeichnet den *Pol* der Geraden. Auf diesem Wege sind sämtliche Polareigenschaften hinsichtlich des Einheitskreises sogleich herleitbar. Indem wir auf der rechten Seite der Polarengleichung $+\,2$ durch $-\,2$ ersetzen, erhalten wir auch die *Antipolarengleichung* und alle Eigenschaften der Antipolarität.

(6, 2) Wir beweisen zunächst den nach NEWTON benannten Satz [17]:

Die Verbindungsgeraden der Diagonalmitten eines Tangentenvierecks gehen durch den Inkreismittelpunkt.

Die Berührpunkte der vier Tangenten mit dem als Einheitskreis angesehenen Inkreis seien a, b, c, d; also ist der Mittelpunkt einer der Diagonalen gleich

$$m = \frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} = \frac{\Sigma\, abc}{(a+b)\,(c+d)}\,.$$

Folglich ist $m : \bar{m} = \Sigma abc : \Sigma a$. Nun ist aber $m : \bar{m}$ kennzeichnend für die Richtung des Ortsvektors m und ersichtlich aus a, b, c, d symmetrisch aufgebaut. Folglich haben die zwei Ortsvektoren aus dem Mittelpunkt des Inkreises zu den Diagonalschnittpunkten hin die nämliche Richtung; also liegen sie in *einer* Geraden durch den Inkreismittelpunkt.

---

[17] Vgl. SIMON [1]), 162 und DÖRRIE [3]), 52/54. Die Aufgabe soll mit der Bestimmung des Mittelpunktortes aller Ellipsen zusammenhängen, die einem konvexen Viereck einbeschrieben sind. Ich habe die Stelle bei NEWTON nicht finden können.

(6, 3) Die zu den Ecken a, b, c eines Dreiecks im Einheitskreis gehörenden Tangenten schneiden sich in den Punkten $\frac{2bc}{b+c}$, $\frac{2ca}{c+a}$, $\frac{2ab}{a+b}$. Der Umkreismittelpunkt u dieses Tangentendreiecks liegt z.B. auf dem Mittellot zu $\frac{2ca}{c+a}$, $\frac{2ab}{a+b}$. Dessen Richtungsteil ist $z - a^2\bar{z}$; das konstante Glied ist

$$\frac{ca}{c+a} + \frac{ab}{a+b} - a^2\left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right).$$

Das Mittellot hat also die Gleichung

$$z - a^2\bar{z} = \frac{2a(bc - a^2)}{(a+b)(c+a)}.$$

Entsprechend

$$z - b^2\bar{z} = \frac{2b(ca - b^2)}{(a+b)(b+c)}.$$

Daraus

$$u = \frac{2abc(a+b+c)}{(b+c)(c+a)(a+b)}, \qquad \bar{u} = \frac{2(bc+ca+ab)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

und z.B.

$$\frac{2bc}{b+c} - u = \frac{2b^2c^2}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$ mit dem absoluten Betrag

$$\pm \frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

Das ist der Ausdruck für den Umkreishalbmesser r des Tangentendreiecks. Er genügt noch der Relation von CHAPPLE-EULER (5, 2). Aus ihr geht hervor, dass r das negative Vorzeichen erhalten muß. Also ist

$$a + b + c = -\frac{\rho u}{r}.$$

Folglich teilt O, der Inkreismittelpunkt des Tangentendreiecks und zugleich Umkreismittelpunkt des Ausgangsdreiecks, die Strecke zwischen dem Umkreismittelpunkt u des Tangentendreiecks und dem Höhenschnittpunkt $h = a + b + c$ des Ausgangsdreiecks im Verhältnis $r : \rho$ von u ab. Vgl. Abb. 14.

Ist nun a' der Schnittpunkt des zum Vektor a gleichgerichteten Pfeils durch u mit dem Umkreis, dann ist $a' - u = \frac{ar}{\rho}$, also $a' = \frac{2abc}{(c+a)(a+b)}$ usw. Die Umkreisradien des Dreiecks (a', b', c') aus den Ecken bis zu u hin sind parallel zu den Umkreisradien des Ausgangsdreiecks (a, b, c) aus den Ecken bis zu O hin; also sind diese Dreiecke *ähnlich und ähnlich gelegen.* Das lineare Maßstabsverhältnis zwischen entsprechenden Strecken beider Figuren ist $r : \rho$, der Ähnlichkeitspunkt $z = -\mathrm{u} \cdot \frac{\rho}{r - \rho}$.

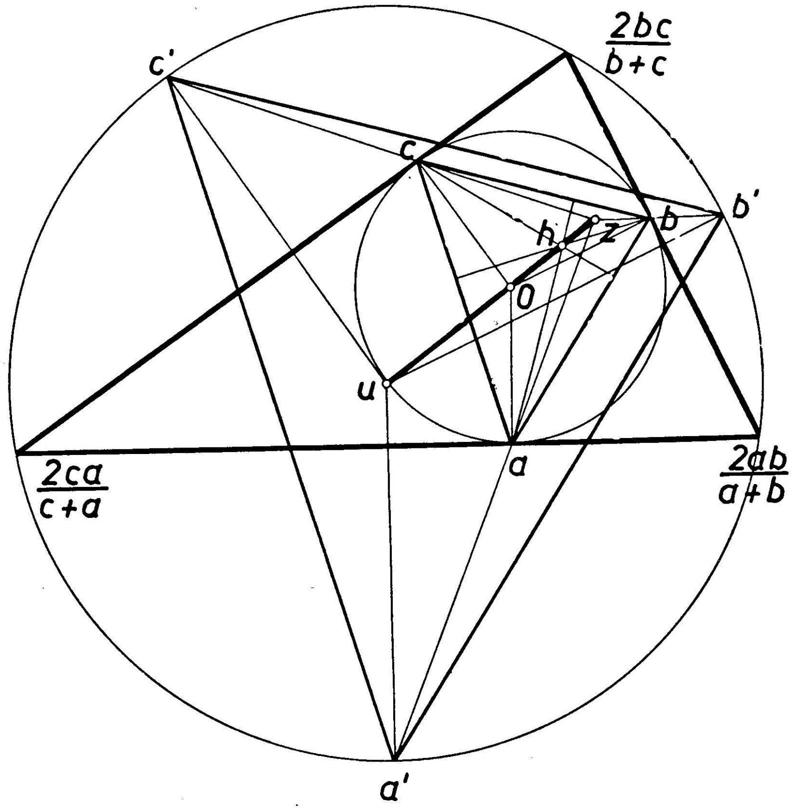

Abb. 14.
Dreiecksbeziehungen.

Also teilt z die über O hinaus verlängerte Strecke uO von außen im Verhältnis $r : \rho$ von u ab.

Die Punkte h und z sind fest, wenn O und u fest sind, d.h. für alle Dreiecke, die dem Kreis um u einbeschrieben und dem Kreis um O umbeschrieben sind. Die Sehnendreiecke aus ihren Berührpunkten im Inkreis haben einen und den nämlichen Feuerbach-Kreis.

(6, 4) *Wann ist ein Tangentenviereck gleichzeitig Sehnenviereck, also bizentrisch ?*

Wir gehen aus von vier Punkten a, b, c, d auf dem Umfang des als Einheitskreis angesehenen Inkreises des Tangentenvierecks. Dabei nehmen wir an, daß sich die Sehnen (a, c) und (b, d) *innerhalb* des Kreises schneiden (Abb. 15). Sollen die zugehörigen Tangenten gleichzeitig ein *Sehnenviereck* abgrenzen, dann müssen sich z.B. die Winkel in den Gegenecken $\frac{2ab}{a+b}$ und $\frac{2cd}{c+d}$ zu zwei Rechten ergänzen, also die Bögen (a, b) und (c, d)

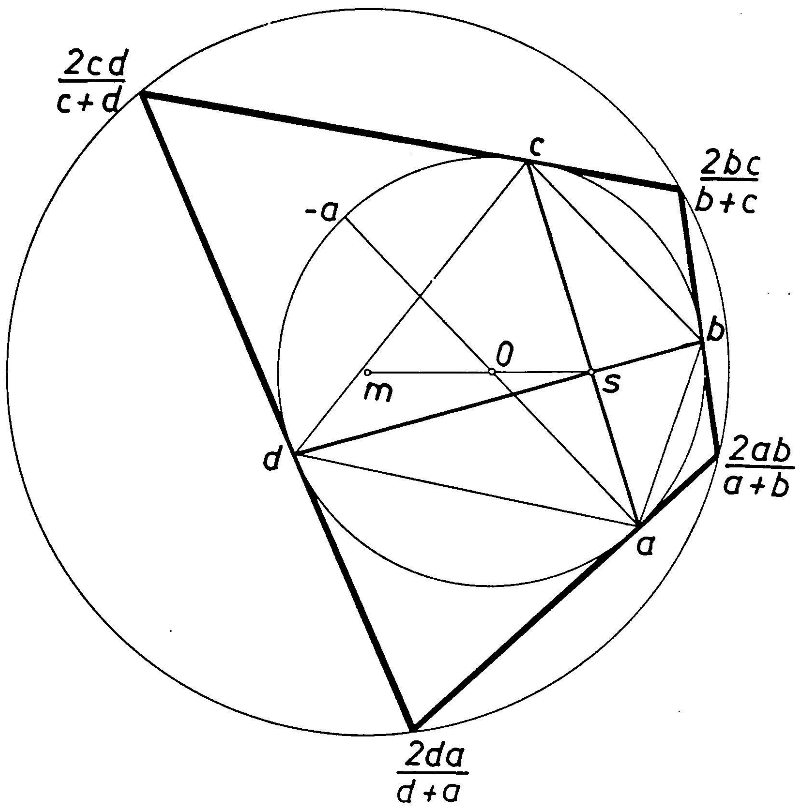

Abb. 15.
Bizentrisches Viereck.

auf dem Einheitskreis zu einem Halbkreis. Folglich sind die Bögen $(b, -a)$ und (c, d) gleich, also $-\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$ oder

$$\boxed{ac + bd = 0}\,.$$

Das besagt: *Das Tangentenviereck ist gleichzeitig Sehnenviereck, wenn sich die Diagonalen des aus den Berührpunkten gebildeten Vierecks im Inkreis senkrecht schneiden.*

Die Gleichungen dieser Diagonalen sind $z + ac\bar{z} = a + c$; $z + bd\bar{z} = b + d$; folglich ist $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ der fragliche

Schnittpunkt und gleichzeitig (vgl. 3, 3) gemeinsamer Punkt der FEUERBACH-Kreise, die zu den vier Sehnendreiecken im Inkreis gehören, die sich aus den Punkten a, b, c, d bilden lassen. Ersichtlich gilt auch die Umkehrung:

Wenn der Diagonalschnittpunkt eines Sehnenvierecks auf jedem der FEUERBACH-*Kreise liegt, die zu den vier Sehnendreiecken aus je drei der vier Eckpunkte des Sehnenvierecks gehören, dann stehen die Diagonalen des Sehnenvierecks auf einander senkrecht.*

(6, 5) Nun kehren wir zu unserem bizentrischen Viereck zurück und bestimmen den Mittelpunkt m des Umkreises: dieser befindet sich z.B. auf den Mitteloten (vgl. 6, 3)

$$z - a^2 \bar{z} = \frac{2a(bd - a^2)}{(d+a)(a+b)}$$

und

$$z - c^2 \bar{z} = \frac{2c(bd - c^2)}{(b+c)(c+d)} .$$

Wir erhalten unter Berücksichtigung von $ac + bd = 0$

$$m = \frac{2abcd\,\Sigma a}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)} .$$

Nun ist aber

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) = (ac+bd)^2 + \Sigma a^2 (bc + cd + db)$$

und

$$\Sigma a \,.\, \Sigma abc = 4abcd + \Sigma a^2 (bc + cd + db) \ ,$$

also im vorliegenden Falle

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) = -4abcd + \Sigma a \,.\, \Sigma abc .$$

Außerdem ist

$$abc = abcd \,.\, \sum \frac{1}{a} = 2abcd\bar{s} ;$$

also nach kurzer Rechnung $m = s : (s\bar{s} - 1)$. Somit liegen der Inkreismittelpunkt O, der Umkreismittelpunkt m und der Diagonalschnittpunkt s in *einer* Geraden; O liegt zwischen m und s und die Längen der Pfeile (m, O) und (m, s) verhalten sich wie ρ^2 zu s^2.

Weiterhin ist

$$m\bar{m} = \frac{s\bar{s}}{(s\bar{s} - 1)^2} = \frac{4\,abcd\,.\,\Sigma a\,.\,\Sigma abc}{(\Sigma a\,.\,\Sigma abc - 4\,abcd)^2} = |\,m\,|^2\,.$$

Zur Bestimmung des Umkreishalbmessers r bilden wir

$$\frac{2\,ab}{a+b} - m = \frac{2\,ab\,(-\,bdc - acd + abd + abc)}{(a+b)\,(b+c)\,(c+d)\,(d+a)}$$

und den dazu konjugiert komplexen Wert. Dann ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$r^2 = \frac{4\,abcd\,(8\,abcd - \Sigma a\,.\,\Sigma abc)}{(\Sigma a\,.\,\Sigma abc - 4\,abcd)^2}\,.$$

Somit ist

$$r^2 + |\,m\,|^2 = 2\left[\frac{4\,abcd}{\Sigma a\,.\,\Sigma abc - 4\,abcd}\right]^2$$

und

$$r^2 - |\,m\,|^2 = -\,2\,.\,\frac{4\,abcd}{\Sigma a\,.\,\Sigma abc - 4\,abcd}\,,$$

also [18]

$$(r^2 - |\,m\,|^2)^2 = 2\,\rho^2\,(r^2 + |\,m\,|^2)\,.$$

Daraus folgt der bekannte Schließungssatz:

Besteht zwischen den Halbmessern r *und* ρ *zweier Kreise und ihrem Mittelpunktabstand* | m | *die soeben hergeleitete Beziehung, dann gibt es* ∞^1 *bizentrische Vierecke, die den Kreis des Halbmessers* ρ *berühren und im Kreis des Halbmessers* r *liegen; die Verbindungssehnen ihrer Berührpunkte im Inkreis schneiden sich dortselbst stets im nämlichen Punkt* s, *und zwar unter rechtem Winkel.*

7. Vom Flächeninhalt.

(7, 1) Um den Flächeninhalt Δ des Dreiecks zu bestimmen, dessen Seiten den Einheitskreis in den Punkten a, b, c berühren, berechnen wir zunächst das gerichtete Längenmaß der Dreiecksseiten (vgl. Abb. 14): Wir bilden nämlich

$$\frac{2\,ab}{a+b} - \frac{2\,ac}{a+c} = \frac{2\,a^2\,(b-c)}{(a+b)\,(a+c)}\,.$$

18) N. Fuss, *Nova Acta Petrop. 13*, für 1795/96, ausgeg. 1802, 166.