I. Fonctions de la classe W et leurs inverses.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **4 (1958)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE FINI ET FONCTIONS MÉROMORPHES *

par Georges VALIRON †

(suite)

DEUXIÈME PARTIE

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS MÉROMORPHES

I. FONCTIONS DE LA CLASSE W ET LEURS INVERSES.

29. *Fonctions entières de la classe* W *et leurs fonctions inverses.*

Une fonction entière de la classe W est une fonction $f(z)$ pour laquelle existe une suite de courbes simples fermées Γ_n entourant l'origine, Γ_{n+1} contenant Γ_n à son intérieur et telles que le minimum de $|f(z)|$ sur Γ_n tende vers l'infini lorsque n tend vers l'infini (ce qui exige évidemment que Γ_n s'éloigne indéfiniment lorsque $n \to \infty$). On peut supprimer une suite infinie de courbes Γ_n sans changer ces propriétés; il est donc permis de supposer que le minimum m_{n+1} de $|f(z)|$ sur Γ_{n+1} est supérieur au maximum M_n de $|f(z)|$ sur Γ_n, maximum qui est atteint en un point P_n au moins de Γ_n. Considérons les domaines dans lesquels $|f(z)| < M_n$, n étant donné; l'un d'eux, soit D_n, contient l'intérieur de Γ_n puisque, dans l'intérieur de Γ_n, $|f(z)| < M_n$; le point P_n appartient à la frontière C_n de D_n qui est une courbe analytique intérieure à Γ_{n+1} puisque $m_{n+1} > M_n$. Nous obtenons ainsi une suite de courbes de module constant C_n; sur chaque C_n, $|f(z)| = M_n$ et à l'intérieur de D_n, $|f(z)| < M_n$. Pour tous les Z de module inférieur à M_n, l'équa-

*) Série de cours et de conférences sur la théorie des fonctions entières, faits en 1948 au Caire et à Alexandrie, d'après le manuscrit revu et mis au point par le professeur Henri MILLOUX.

tion $f(z) = Z$ a le même nombre p_n de racines intérieures à D_n, la dérivée $f'(z)$ a exactement $p_n - 1$ racines dans D_n si l'on suppose, ce qui est possible en diminuant infiniment peu s'il y a lieu la valeur de M_n, que $f'(z)$ ne s'annule pas sur C_n. La fonction inverse $z = f_{-1}(Z)$ de $Z = f(z)$ correspondant à z intérieur à D_n est une fonction à p_n branches définie dans le cercle $|Z| < M_n$. On peut rendre ses branches uniformes en joignant les points $Z^j = f(z^j)$ correspondant à $f'(z^j) = 0$ à la circonférence $|Z| = M_n$ par des rayons (si $Z^j = 0$) ou des segments de rayon. Et on peut considérer la surface de Riemann à p_n feuillets circulaires réunis les uns aux autres le long de certains de ces rayons ou segments de rayon de façon à former une surface connexe sur laquelle $z = f_{-1}(Z)$ est uniforme [22)]. Lorsque n croît le rayon du cercle $|Z| = M_n$ croît, les feuillets voient augmenter leur rayon, les lignes de passage doivent être prolongées et de nouvelles lignes s'introduisent permettant le passage dans de nouveaux feuillets. Si l'on fait croître n indéfiniment, on obtient à la limite la surface de Riemann à une infinité de feuillets sur laquelle la fonction inverse $z = f_{-1}(Z)$ est définie et uniforme quel que soit Z fini. On peut préciser ce qui vient d'être dit: si dans le domaine limité par C_n et C_{n+1}, $f(z)$ ne s'annule pas, aucun feuillet nouveau ne s'introduit lorsqu'on passe de C_n à C_{n+1}; si au contraire $p_{n+1} - p_n$ n'est pas nul, $p_{n+1} - p_n$ nouveaux feuillets s'introduisent et $f'(z)$ a aussi $p_{n+1} - p_n$ zéros dans le domaine compris entre C_n et C_{n+1}. Comme la portion de surface de Riemann correspondant à D_{n+1} est formée de p_{n+1} feuillets circulaires formant une surface connexe, l'un au moins des points Z^j correspondant à un z^j compris entre C_n et C_{n+1} est extérieur à la circonférence $|Z| < M_n$ et se trouve sur l'un des feuillets correspondant à D_n prolongés dans $|Z| < M_{n+1}$.

Les points singuliers de la surface Σ de Riemann sont les points critiques algébriques Z^j et le point à l'infini. D'après ce qui vient d'être dit, le point à l'infini est point limite de points critiques algébriques. Ce point à l'infini doit être considéré comme un *seul point* sur la surface Σ, car lorsqu'on tourne et décrit une courbe C_n, le point Z tourne p_n fois sur le cercle $|Z| = M_n$ et parcourt les p_n feuillets; il s'ensuit qu'on peut aller sur Σ d'un point Z de grand module à un autre point Z' de grand module sans cesser de rester dans le voisinage du point à l'infini. Ce même fait est visible dans le plan des z. Si Z et Z' sont de grands modules, les valeurs z et z' le sont aussi, z et z' sont par exemple extérieurs à C_n et intérieurs à C_m, $m > n$, et en outre extérieurs aux domaines $|f(z)| < A$ contenus dans la « couronne » comprise entre C_n et C_m, on peut joindre ces points par une courbe le long de laquelle $|f(z)| > A$.

Ainsi, il y a un seul point singulier à l'infini sur Σ. Quelle que soit la façon dont Z s'éloigne indéfiniment sur Σ, z tend vers l'infini. On dit que Z infini est un point *directement critique* et comme il est point limite de points critiques algébriques on dit qu'il est de *seconde espèce.*

Si l'on considère l'un des feuillets de la surface Σ telle qu'elle a été construite et si on prend sur ce feuillet l'intérieur d'un cercle $|Z| < R$, il n'existe dans ce cercle qu'un nombre fini de points Z^j situés sur ce feuillet et par suite un nombre fini de lignes de passage issues de ces points. Au feuillet complet correspond dans le plan des z un domaine Δ nécessairement non borné qui est un domaine complet d'univalence de la fonction $f(z)$; dans Δ augmenté de sa frontière $f(z)$ prend toute valeur finie. La frontière de Δ correspond aux lignes de passage situées sur le feuillet considéré, elle est formée de lignes sur lesquelles l'argument de $f(z)$ est constant. A la surface Σ et à ses lignes de passage correspond ainsi une division du plan des z en domaines complets d'univalence.

Bien que les surfaces de Riemann ainsi obtenues soient les plus simples parmi les surfaces simplement connexes (elles sont simplement connexes puisqu'elles correspondent biunivoquement au plan des z privé du point à l'infini), elles peuvent présenter quelques anomalies. Dans les cas simples, chaque feuillet ne contiendra qu'un nombre fini de points critiques, mais dans certains cas un feuillet, ou un nombre fini de feuillets, ou même tous les feuillets pourront renfermer une infinité de lignes de passage. Les fonctions d'ordre nul permettent de construire des exemples de cette espèce, en partant évidemment de la dérivée de la fonction. On obtient ainsi des fonctions pour lesquelles, soit sur un feuillet, soit sur un nombre fini de feuillets, soit sur tous les feuillets, les arguments des lignes de passage sont denses sur le segment $(0, 2\pi)$. Dans le plan des z, les lignes $\arg Z =$ const. qui coupent un arc de courbe $|Z| =$ const. et qui sont menées dans le sens des $|Z|$ croissants, coupent cet arc en des points denses sur cet arc [23)].

30. *Fonctions de la classe* W *holomorphes pour* $|z| < 1$.

Les fonctions de Kœnigs étudiées par Fatou dans ses mémoires sur l'itération (*Bull. Soc. math.*, 1920), les fonctions construites par Lusin et Priwalof (*Annales Ecole norm.*, 1925) jouissent de la propriété suivante: Ces fonctions sont holomorphes pour $|z| < 1$. $F(z)$ étant une de ces fonctions, il existe une suite de courbes Γ_n simples fermées, Γ_n étant contenue dans une couronne $1 - \varepsilon_n < |z| < 1$ (ε_n tendant vers zéro lorsque n croît indéfiniment) telles que le minimum de $|F(z)|$ sur F_n tende vers l'infini avec n. On peut répéter pour une telle fonction ce qui a été dit au n° 29 pour les fonctions entières: il existe une suite de courbes C_n de module constant $|F(z)| = M_n$ telles que C_{n+1} contienne C_n à son intérieur, enveloppant l'origine, et telles que M_n croisse indéfiniment avec n. Si grand que soit A, il existe une suite de domaines Δ_n ayant pour frontières deux courbes consécutives C_n, C_{n+1} contenant des domaines $\delta_n(A)$ dans lesquels $|F(z)| < A$, ces domaines δ_n ne tournant pas autour de l'origine. Tout point de la circonférence $|z| = 1$ est point limite de points $\delta_n(A_n)$ si $A_n \to \infty$ (sinon $|F(z)|$ tendrait vers l'infini lorsque z tendrait vers les points d'un arc α de $|z| = 1$, donc $\frac{1}{F(z)}$ tendrait vers zéro, $\frac{1}{F(z)}$ serait identiquement nul d'après le principe de la symétrie de Schwarz). En est-il de même si on laisse A_n fixe ?

On peut construire la surface de Riemann Σ décrite par $Z = F(z)$ comme dans le cas des fonctions entières du n° 29. Pour les mêmes raisons qu'au n° 29, le point à l'infini, $Z = \infty$, doit être considéré comme un seul point sur cette surface, c'est le seul point critique non algébrique de cette surface Σ et ce point critique est limite de points critiques algébriques. Σ est une surface simplement connexe qui est représentée par la fonction inverse $z = F_{-1}(Z)$ de $F(z)$ sur le cercle $|z| < 1$. C'est une surface du *type hyperbolique*, les surfaces simplement connexes représentables conformément (sauf aux points de ramification) sur le plan privé du point à l'infini étant dites du *type parabolique* et les surfaces représentables sur le plan complet étant les surfaces du *type elliptique.* Les surfaces du type elliptique sont les surfaces décrites par les valeurs des fractions rationnelles, les surfaces du type parabolique sont les surfaces décrites par les valeurs des fonctions méromorphes sauf à l'infini qui est point essentiel, les surfaces du type hyperbolique sont les surfaces décrites par les valeurs des fonctions méromorphes dans un cercle et admettant la circonférence comme coupure.

Dans le cas actuel, la surface Σ est du type hyperbolique et est illimitée. A la surface telle qu'elle a été obtenue correspond dans le plan des z une division de l'intérieur du cercle $|z| < 1$ en domaines complets d'univalence pour $F(z)$. Ces domaines ne sont pas complètement intérieurs au cercle $|z| < 1$ mais la façon dont ils approchent de la circonférence $|z| = 1$ reste inconnue.

Dans les cas particuliers des fonctions de Kœnigs, par exemple, la fonction $F(z)$ tend vers l'infini lorsque $|z|$ tend vers un sur un rayon, arg. $z =$ const., presque pour tous les rayons, dans les exemples de Lusin et Priwalof; parmi les courbes Γ_n figurent des cercles de centre à l'origine. A-t-on toujours des propriétés de ce genre ?

Quoi qu'il en soit, le fait important est l'existence d'un seul point critique non algébrique pour la fonction inverse, point qui est point limite de points critiques algébriques.

31. *Sur une classe de surfaces du type hyperbolique.*

Dans les exemples de Fatou, Lusin et Priwalof signalés ci-dessus, il existe des rayons arg. $z =$ const. sur lesquels $|F(z)| \to \infty$ lorsque $|z| \to 1$. Pour la fonction inverse $z = F_{-1}(Z)$, il existe donc des chemins tendant vers l'infini sur lesquels z a une limite. Il y a naturellement d'autres chemins sur lesquels $Z \to \infty$ tandis que z n'a pas de limite, $|z| \to 1$ et, par exemple, arg. z tend vers l'infini. Nous allons voir qu'il existe des fonctions pour lesquelles la fonction inverse n'a qu'une seule singularité à l'infini, isolée des singularités algébriques et pour lesquelles, quelle que soit la façon dont Z tend vers l'infini, z n'a jamais de limite. Nous nous bornerons à un exemple particulier [24].

Prenons la fonction

$$z = e^{\zeta - \frac{1}{\sqrt{\zeta}}}, \qquad \zeta = \xi + i\eta, \tag{1}$$

où l'on suppose $\eta > \eta_0 > 0$ et où l'on prend

$$\sqrt{\zeta} = (1+i)\sqrt{\frac{\eta}{2}} \qquad \text{pour} \qquad \xi = 0,$$

et $|\xi|\eta^2 < 1$. Cette fonction représente conformément et biunivoquement le domaine Δ défini par $\eta > \eta_0$, $|\xi|\eta^2 < 1$ sur un domaine D en forme de spirale, intérieur au cercle $|z| < 1$ et qui s'enroule autour de ce cercle. En deux points homologues de D et Δ, le rapport de similitude tend vers un lorsqu'on s'éloigne indéfiniment dans Δ.

Considérons, d'autre part, la fonction

$$g(\zeta) = e^{e^{e^{-i\zeta}}}$$

qui tend rapidement vers zéro lorsqu'on s'éloigne indéfiniment dans Δ dans certains domaines et qui croît indéfiniment dans d'autres puisque

$$e^{-i\xi} = e^{\eta - i\xi},$$

$$e^{e^{-i\zeta}} = e^{e^{\eta}(\cos\xi + i\sin\xi)} = e^{e^{\eta}\cos\xi}\left[\cos(e^{\eta}\sin\xi) + i\sin(e^{\eta}\sin\xi)\right]$$

de sorte que, si

$$e^{\eta}\sin\xi = \pm\pi + a, \qquad |a| < \frac{\pi}{2},$$

$|g(\zeta)|$ tend vers zéro comme

$$e^{-\cos a\, e^{e^{\eta}(1-0(1))}}, \tag{2}$$

tandis que, si

$$e^{\eta}\sin\xi = \alpha, \qquad |\alpha| < \frac{\pi}{2},$$

$|g(\zeta)|$ tend vers l'infini comme

$$e^{\cos\alpha\, e^{e^{\eta}(1-0(1))}}.$$

Désignons par $\zeta = h(z)$ la fonction inverse de (1) lorsque ξ est dans Δ; c'est une fonction holomorphe dans le domaine spiralique D; la fonction

$$F(z) = g(h(z))$$

se comporte comme $g(\zeta)$. Appelons $\Gamma(a, b)$ la courbe de D correspondant à la frontière de la portion $\delta(a, b)$ de Δ définie par

$$|e^{\eta} \sin \xi| < \pi + a\,, \qquad 0 < a < \frac{\pi}{2}\,; \qquad \eta > b > \eta_0\,.$$

La courbe $\Gamma(a, b)$ décompose le cercle $|z| < 1$ en deux domaines: un domaine en spirale intérieur à D, soit I (a, b), et un domaine complémentaire E (a, b).

La rapidité de la décroissance de (2) montre que l'intégrale

$$\frac{1}{2 i \pi} \int_{\Gamma(a,b)} \frac{F(u)}{u - z}\, du \tag{3}$$

où u décrit $\Gamma(a, b)$ dans le sens direct, définit une fonction $f(z)$ holomorphe dans E (a, b) et une fonction $f_1(z)$ holomorphe dans I (a, b). Lorsque $|z|$ tend vers 1, $|f(z)|$ et $|f_1(z)|$ restent uniformément bornés si z ne se rapproche pas trop de $\Gamma(a, b)$; on vérifie qu'il suffit que

$$|e^{\eta} \sin \xi \pm (\pi + a)| > \varepsilon > 0$$

pour qu'il en soit ainsi.

Laissant a fixe, et faisant croître b, on prolonge $f(z)$ dans tout le cercle $|z| < 1$, soit C. D'autre part, si l'on donne à b deux valeurs b et $b' > b$ et si l'on prend z entre les courbes $\Gamma(a, b)$ et $\Gamma(a, b')$, l'intégrale (3) est égale à F (z) sur le contour formé par les parties non communes de $\Gamma(a, b)$ et $\Gamma(a, b')$. On a donc, en supposant que $\Gamma(a, b)$ est parcourue dans le sens direct par rapport aux points de E (a, b),

$$f(z) = F(z) + f_1(z)\,.$$

Comme on peut aussi faire varier a, on voit que $f(z)$ est bornée sauf dans les domaines correspondant à

$$|e^{\eta} \sin \xi| \leqslant \frac{\pi}{2}\,, \qquad \eta > b\,, \tag{4}$$

où $f(z)$ est la somme de $F(z)$ et d'une fonction bornée. Et dans le domaine (4), $F(z)$ croît indéfiniment lorsque $|z|$ tend vers un de la même façon que $g(\zeta)$. D'autre part, la dérivée de $f(z)$ est bornée dans les mêmes conditions que $g'(\zeta)$ puisque $\frac{d\zeta}{dz}$ tend vers un. Comme

$$g'(\zeta) = g(\zeta)\, e^{e^{-i\zeta}} e^{-i\zeta} - i$$

et que

$$\left| e^{e^{-i\zeta}} e^{-i\zeta} \right| = e^{\eta}\, e^{e^{\eta}\cos\xi}$$

on voit que $|g'(\zeta)|$ tend vers l'infini, dans tout le domaine (4), $f'(z)$ ne s'annule pas. Le point à l'infini est un point critique pour la fonction inverse $f_{-1}(Z)$ et il est isolé des points critiques algébriques.

On ne change pas ces résultats si l'on prend la somme de $f(z)$ et d'une fonction $k(z)$ dont la dérivée $k'(z)$ est bornée dans C et admet C comme coupure. La fonction $k(z)$ sera aussi bornée et d'après un théorème de Fatou et Riesz, $k(re^{i\theta})$ aura une limite lorsque r tendra vers 1, presque pour toutes les valeurs de θ et l'ensemble de ces valeurs limites formeront un ensemble non dénombrable.

Considérons les deux fonctions $f(z)$ et $f(z) + k(z)$. Si l'une tend vers une limite finie lorsque z décrit un chemin L tendant vers le cercle C, l'autre n'a pas de limite puisque $k(z)$ n'en a pas. Est-il possible que $f(z)$ ait une limite pour un chemin L et $f(z) + k(z)$ pour un chemin L' ? Ces deux chemins ne se couperont pas pour $|z|$ assez proche de 1 et limiteront un domaine D' de forme spiralique s'enroulant autour de C à l'intérieur de C [25]. La fonction $f(z)$ tend vers une limite sur L et est bornée dans ce domaine D'; $f(z) + k(z)$ tend vers une limite sur L' et est bornée dans le domaine D'. Représentons conformément D' sur un cercle $|v| < 1$. Aux deux chemins L et L' correspondront deux arcs de ce cercle aboutissant à un même point, $v = 1$, par exemple, correspondant à $|z|$ tendant vers 1. Alors à $f(z)$ et $f(z) + k(z)$ correspondent des fonctions $\varphi(v)$ et $\psi(v)$ bornées dans le cercle, tendant vers des limites lorsque v tend vers 1 sur la circonférence d'un côté de ce point pour $\varphi(v)$, de l'autre pour $\psi(v)$. D'après un théorème de Lindelöf, elles auront les mêmes limites respectivement lorsque v tendra vers 1 sur l'axe réel. Et c'est impossible puisque la différence de $\varphi(v)$ et $\psi(v)$ n'a pas de limite.

Par suite, soit $f(z)$, soit $f(z) + k(z)$, n'a pas de limite possible autre que l'infini lorsque $|z|$ tend vers un. La fonction inverse $\Phi(Z)$ admet pour singularités uniquement des points critiques algébriques et le point à l'infini, qui est un point critique isolé et tel que lorsque Z tend vers ce point d'une façon quelconque, la valeur z de la fonction n'a aucune limite.

32. *Démonstration du théorème de Lindelöf.*

Par une transformation conforme du cercle en un demi-plan, puis du demi-plan en un angle, on est ramené à démontrer la proposition suivante: Supposons que $\Psi(z)$ soit holomorphe dans le secteur

$$|\arg z| < \frac{\pi}{6}, \qquad |z| < 1$$

qu'elle soit bornée par M dans le secteur, continue sur le côté $\arg z = \frac{\pi}{6}$ et tende vers zéro lorsque z tend vers zéro sur ce côté. Dans ces conditions, $\Psi(z)$ tend vers zéro lorsque z tend vers zéro sur la bissectrice $\arg z = 0$.

Prenons en effet z réel positif inférieur à $\eta < \frac{1}{2}$ et considérons la fonction

$$\Psi(z+\zeta)\,\Psi(z+\zeta\omega)\,\Psi(z+\zeta\omega^2)\,\Psi(z+\zeta\omega^3)\,\Psi(z+\zeta\omega^4)\,\Psi(z+\zeta\omega^5), \qquad \omega = e^{\frac{i\pi}{3}}.$$

Elle est holomorphe dans l'hexagone limité par les droites obtenues en faisant tourner le côté $\arg z = \frac{\pi}{6}$ des angles $k\frac{\pi}{3}$, $k = 1, \ldots, 5$ autour du point z, et il s'ensuit que sur les côtés de cet hexagone, et par suite au centre, son module est au plus égal à ε, maximum de $|\Psi(z)|$ sur la portion du côté $\arg z = \frac{\pi}{6}$ qui fait partie de la frontière, multiplié par la borne de $|\Psi(z)|$ élevé à la puissance 5. Ceci démontre la proposition.