

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 4 (1958)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SU UN ESEMPIO DI FUNZIONE CONTINUA SENZA DERIVATA
Autor: De Vito, Luciano
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-34639>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

zum Polygon fremd sind. $\overline{OP'}$ selbst liegt ausser O auch nicht darauf. Also gehört $\overline{OP'}$ bis auf O zum Teilgebiet G. Man fährt nun wie im ersten Falle weiter.

Damit ist gezeigt: Der Rand von G besteht aus Strecken, die auf dem ursprünglichen Polygon liegen. Diese Strecken bilden selbst ein geschlossenes Teilpolygon, weil sich an jeden Endpunkt einer Strecke wenigstens eine weitere anschliesst. Satz 3 ist bewiesen.

SU UN ESEMPIO DI FUNZIONE CONTINUA SENZA DERIVATA ¹⁾

da Luciano DE VITO, Roma

(Reçu le 22 avril 1958)

..... Nel Suo articolo: « Sur un exemple de fonction continue sans dérivée », apparso su *L'enseignement mathématique*, tomo III, fascicolo 1, gennaio-marzo 1957, Ella dimostra che la funzione:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \left| 2^k x - \left[2^k x + \frac{1}{2} \right] \right|,$$

ove $[y]$ è il più grande intero che non supera y , è continua e mai derivabile sull'asse x .

Credo sia di qualche interesse notare che la funzione $f(x)$ dell'elegante esempio da Lei portato non soltanto è continua, ma è anche uniformemente hölderiana con qualsiasi esponente di Hölder α , tale che $0 < \alpha < 1$. Si ha precisamente, per ogni coppia di punti x_1 e x_2 dell'asse reale:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \frac{2^{\alpha-1}}{1 - 2^{\alpha-1}} |x_2 - x_1|^{\alpha}.$$

¹⁾ Da una lettera al Prof. Georges de Rham (29 luglio 1957).

E' infatti evidente che $\varphi(x) = \left| x - \left[x + \frac{1}{2} \right] \right|$ è hölderiana; per determinare il minimo coefficiente di Hölder relativo all'esponente α si procede nel modo seguente: si vede che $|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)|$ è maggiorato da $\frac{1}{2}$ ed inoltre $|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq |x_2 - x_1|$; ne viene:

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)|^{1-\alpha} |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)|^\alpha \leq 2^{\alpha-1} |x_2 - x_1|^\alpha. \quad (1)$$

Poichè nella (1) sussiste il segno = per $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{1}{2}$, si ha che $2^{\alpha-1}$ non può essere sostituita nella (1) con una costante più piccola.

Dalla (1) si trae:

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \{2^{-k} \varphi(2^k x_2) - 2^{-k} \varphi(2^k x_1)\} \right| \leq \\ &\leq 2^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\alpha k - k} |x_2 - x_1|^\alpha = \frac{2^{\alpha-1}}{1 - 2^{\alpha-1}} |x_2 - x_1|^\alpha. \end{aligned}$$

Naturalmente, con analogo ragionamento, si prova anche che è hölderiana la funzione $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \left| a^k x - \left[a^k x + \frac{1}{2} \right] \right|$ con a intero positivo pari e quindi, in particolare, quella costruita da B. L. Van der Waerden.

Analoghe considerazioni possono ripetersi per la funzione considerata da Weierstrass:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k x),$$

ove a è un intero dispari, b è tale che $0 < b < 1$ e $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

Tenendo presentè che ogni funzione uniformemente hölderiana con esponente di Hölder $\alpha = 1$ (cioè lipschitziana) è assolutamente continua, l'osservazione che mi sono permesso di sottoporLe pone viepiù in luce l'interesse della funzione da Lei costruita.....

N.B. — Rispondendo a questa lettera, il Prof. de Rham mi ha gentilmente comunicato le seguenti osservazioni. Con lo stesso metodo seguito per dimostrare la hölderianità di $f(x)$ con esponente di Hölder α , si può dimostrare quella della funzione

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \gamma(a^k x), \text{ ove } \gamma \text{ è una funzione hölderiana con}$$

esponente di Hölder α , nell'ipotesi che le due serie: $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$

e $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| |a|^{\alpha k}$ siano convergenti. Se si assume $a = 2$,

$$\gamma(x) = \left| x - \left[x + \frac{1}{2} \right] \right|, \quad b_k \geq 0 \text{ e se la successione } \{b_k 2^k\}$$

non è infinitesima per $k \rightarrow \infty$, la funzione $g(x)$ è sprovvista di derivata in ogni punto, come mostra il ragionamento dell'articolo sopra citato del Prof. de Rham. Se si assume inoltre

$b_k = 2^{-k}$ si ottiene una funzione $g(x)$ hölderiana, come si prova con il ragionamento sopra esposto. Se si assume invece $b_k = \frac{1}{k^2}$,

si ottiene una funzione $g(x)$ che è sprovvista di derivata (si ha infatti $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k}{k^2} = \infty$) e che non è hölderiana, come segue dalla

relazione:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(2^{-n}) - g(0)}{2^{-n\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n\alpha-n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k}{k^2} = \infty \quad (0 < \alpha \leq 1).$$