**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Band:** 4 (1958)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** RECHERCHES RÉCENTES SUR L'UNICITÉ DU DÉVELOPPEMENT TRIGONOMÉTRIQUE

**Kapitel:** 6. Le cas de  irrationnel. Les nombres de la classe C.

**Autor:** Salem, Raphaël

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-34640

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

**Download PDF:** 16.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

Ainsi a été mis en évidence le rôle essentiel de la nature arithmétique de $\xi$.

## 6. Le cas de $\xi$ irrationnel. Les nombres de la classe C.

Soit $\theta$ un entier algébrique dont tous les conjugués (autres que $\theta$ lui-même) ont des modules strictement inférieurs à l'unité. On peut évidemment supposer $\theta > 0$. Et l'on a nécessairement $\theta > 1$. Nous désignerons par C la classe de tous les nombres $\theta$. Soit $\xi = 1/\theta$. Si $\theta > 2$, ce que nous supposerons, il existe un ensemble cantorien E à rapport constant $\xi$. Le premier résultat obtenu dans la classification des ensembles cantoriens à rapport constant $\xi$ irrationnel est le suivant. Pour que E soit un ensemble U, il est nécessaire que l'on ait $\xi = 1/\theta$, où $\theta$ est un nombre de la classe C. En d'autres termes, si $1/\xi$ n'appartient pas à C (par exemple si $\xi$ est transcendant), l'ensemble est un ensemble M.

La démonstration se fait en considérant la fonction de Lebesgue construite sur l'ensemble E à rapport constant $\xi$ et en démontrant que son coefficient de Fourier-Stieltjes

$$c_n = (2\pi)^{-1} \prod_{k=1}^{\infty} \cos \pi n \xi^{k-1} (1 - \xi) \tag{2}$$

tend vers zéro pour $n \to \infty$ dès que $1/\xi$ n'appartient pas à la classe C.

Cette démonstration s'appuie à son tour sur un théorème de Pisot d'après lequel les nombres $\theta$ de la classe C sont caractérisés par l'existence d'un nombre réel $\lambda$ tel que la série

$$\sum_{0}^{\infty} \sin^2 \pi \lambda \theta^n$$

soit convergente. Cette propriété est, en soi, un résultat important de la théorie des approximations diophantiennes. Elle caractérise les nombres $\theta$ de C par l'existence d'un $\lambda$ tel que $\lambda\theta^n$, réduit modulo 1, tende vers zéro assez vite pour que la somme des carrés de $\{\lambda\theta^n\}$ converge, ($\{z\}$ désignant la différence en valeur absolue entre $z$ et l'entier le plus voisin).