Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1959)

Heft: 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES PRINCIPES EXTRÉMAUX DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Autor: Hersch, Joseph

Kapitel: 6. Un passage Dirichlet Thomson, à l'aide des lignes de flux d'un champ vectoriel $\vec{p}$ concurrent pour Thomson.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35495

6. Un passage Dirichlet $\longrightarrow$ Thomson, à l'aide des lignes de flux d'un champ vectoriel $\vec{p}$ concurrent pour Thomson.

Partageons le domaine G en lanières G_j par des lignes de flux $\varkappa$ de $\vec{p}$, comme au § 4.1; dans le principe de Dirichlet (§ 1.1)

$$D(\varphi) = \mathrm{Min}_v D(v),\ v \text{ continue dans G, lisse par morceaux} = \begin{cases} 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ 1 \text{ sur } \Gamma_1, \end{cases}$$

admettons maintenant à concurrence également les fonctions $\tilde{v}$ discontinues le long des coupures $\varkappa$; c'est-à-dire que nous exigeons seulement la continuité dans chaque lanière G_j: le minimum diminue évidemment et l'on a

$$D(\varphi) \geqslant \mathrm{Min}_{\tilde{v}} D(\tilde{v}).$$

Soit $\tilde{v}_j$ la restriction de $\tilde{v}$ à G_j, et soit de nouveau w_j la solution du problème mixte dans G_j: $w_j = 0$ sur Γ_{0j}, $w_j = 1$ sur Γ_{1j}, $\frac{\partial w_j}{\partial n} = 0$ sur les coupures $\varkappa$.

$$\mathrm{Min}_{\tilde{v}} D(\tilde{v}) = \sum_j \mathrm{Min}_{\tilde{v}_j} D(\tilde{v}_j) = \sum_j D(w_j) = \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial n}\, ds = D(w),$$

comme au § 4. 1; pour des lanières G_j de largeur infinitésimale, on retrouve, comme au § 4. 2, le principe de Thomson:

$$\frac{\left(\oint_{\Gamma_1} \vec{p}\,.\,\vec{n}\, ds\right)^2}{\iint_G \vec{p}^2\, dx dy} \leqslant D(w),$$

donc $\leqslant D(\varphi)$ en vertu de ce qui précède.

7. Un pas vers un principe de Thomson pour la membrane vibrante.

7. 1. Cherchons à réaliser, pour le problème de la membrane vibrante (§ 1. 2), un passage analogue à celui du § 6; à