

# 7. Un pas vers un principe de Thomson pour la membrane vibrante.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

6. UN PASSAGE DIRICHLET  $\longrightarrow$  THOMSON,  
à l'aide des lignes de flux d'un champ vectoriel  $\vec{p}$   
concurrent pour Thomson.

Partageons le domaine  $G$  en lanières  $G_j$  par des lignes de flux  $\kappa$  de  $\vec{p}$ , comme au § 4. 1; dans le principe de Dirichlet (§ 1. 1)

$$D(\varphi) = \text{Min}_{\varphi} D(\varphi), \varphi \text{ continue dans } G, \text{ lisse par morceaux} = \begin{cases} 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ 1 \text{ sur } \Gamma_1, \end{cases}$$

admettons maintenant à concurrence également les fonctions  $\tilde{\varphi}$  discontinues le long des coupures  $\kappa$ ; c'est-à-dire que nous exigeons seulement la continuité dans chaque lanière  $G_j$ : le minimum diminue évidemment et l'on a

$$D(\varphi) \geq \text{Min}_{\tilde{\varphi}} D(\tilde{\varphi}).$$

Soit  $\tilde{\varphi}_j$  la restriction de  $\tilde{\varphi}$  à  $G_j$ , et soit de nouveau  $\omega_j$  la solution du problème mixte dans  $G_j$ :  $\omega_j = 0$  sur  $\Gamma_{0j}$ ,  $\omega_j = 1$  sur  $\Gamma_{1j}$ ,  $\frac{\partial \omega_j}{\partial n} = 0$  sur les coupures  $\kappa$ .

$$\text{Min}_{\tilde{\varphi}} D(\tilde{\varphi}) = \sum_j \text{Min}_{\tilde{\varphi}_j} D(\tilde{\varphi}_j) = \sum_j D(\omega_j) = \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = D(\omega),$$

comme au § 4. 1; pour des lanières  $G_j$  de largeur infinitésimale, on retrouve, comme au § 4. 2, le principe de Thomson:

$$\frac{\left( \oint_{\Gamma_1} \vec{p} \cdot \vec{n} ds \right)^2}{\iint_G \vec{p}^2 dx dy} \leq D(\omega),$$

donc  $\leq D(\varphi)$  en vertu de ce qui précède.

7. UN PAS VERS UN PRINCIPE DE THOMSON  
POUR LA MEMBRANE VIBRANTE.

7. 1. Cherchons à réaliser, pour le problème de la membrane vibrante (§ 1. 2), un passage analogue à celui du § 6; à

présent: « de Rayleigh à Thomson ». Pour cela, partageons le domaine  $G$  du § 1.2 en sous-domaines  $G_j$  (fig. 6).

Dans le principe de Rayleigh

$$\lambda_1 = \text{Min}_{\varphi} R[\varphi], \quad \varphi \text{ continue dans } G, \\ \text{lisse par morceaux, } = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

nous voulons maintenant admettre également à concurrence les fonctions  $\tilde{\varphi}$  discontinues le long des coupures. Le minimum ne peut évidemment que décroître:

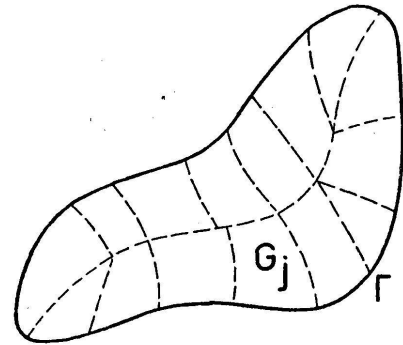


Fig. 6

$$\lambda_1 \geq \text{Min}_{\tilde{\varphi}} R[\tilde{\varphi}];$$

appelons  $\tilde{\varphi}_j$  la restriction de  $\tilde{\varphi}$  à  $G_j$ .

Soient, dans  $G_j$ ,  $\xi_j$  la première valeur propre et  $\omega_j$  la fonction propre correspondante, d'une membrane  $G_j$  liée le long de  $\Gamma_j$ , libre sur les « coupures »; on a  $\Delta \omega_j + \xi_j \omega_j = 0$  et  $\omega_j > 0$  dans  $G_j$ ,  $\omega_j = 0$  sur  $\Gamma_j$ ,  $\frac{\partial \omega_j}{\partial n} = 0$  sur les coupures;  $\xi_j = \text{Min}_{\tilde{\varphi}_j} R[\tilde{\varphi}_j]$ .  
Donc

$$\lambda_1 \geq \text{Min}_{\tilde{\varphi}} R[\tilde{\varphi}] = \text{Min}_{\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_m} \frac{\sum_j D(\tilde{\varphi}_j)}{\sum_j \iint_{G_j} \tilde{\varphi}_j^2 dx dy} = \min_j \xi_j.$$

Si toutes les coupures sont des lignes de flux de grad  $\varphi$  ( $\varphi$  étant la fonction propre fondamentale, cf. § 1.2),  $\omega_j$  est simplement la restriction de  $\varphi$  à  $G_j$  et l'on a, pour tout  $j$ ,

$$\xi_j = R[\omega_j] = \lambda_1$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

$$\lambda_1 = \text{Max}_{\text{découpages de } G \text{ en lanières } G_j} \min_j \xi_j. \quad 1)$$

1) à Voir ce sujet: *C.R. Acad. Sci. Paris*, 248, 1959, p. 2060, où deux applications numériques sont indiquées.

7. 2. Dans le cas limite de bandes  $G_j$  de largeur infinitésimale, on a, dans chaque  $G_j$ , un problème à une seule variable indépendante, car  $\omega_j = \omega_j(s)$ .

Le parallélisme entre ce § 7 et le précédent permet d'interpréter ce résultat comme un pas en direction d'un « principe de Thomson » pour la membrane vibrante. La difficulté reste évidemment le calcul (ou l'évaluation par défaut) de tous les  $\xi_j$ . Peut-on aller au-delà de cette formulation ? La question reste ouverte.