ZWEI LIMITATIONSSÄTZE ÜBER BEREICH-INTEGRALE

Autor(en): **Wendelin, Hermann**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-35497

ZWEI LIMITATIONSSÄTZE ÜBER BEREICH-INTEGRALE

von Hermann WENDELIN, Graz

(Reçu le 10 avril 1959)

Im folgenden werden zwei Limitationssätze für mehrdimensionale Jordansche Integrale über Jordan-messbaren Punktmengen als Integrationsbereiche entwickelt. Die in den Sätzen formulierten hinreichenden Bedingungen sind handlich und führen durch einfache Spezialisierungen auf in den meisten ausführlicheren Lehrbüchern über Differential- und Integralrechnung anzutreffende Limitationssätze. Dem allgemeineren zweiten Satz wird aus beweistechnischen Gründen der speziellere erste Satz vorangestellt.

Wir führen vorerst, lediglich zur Vereinfachung der Formulierungen und Beweisführungen einige abkürzende Bezeichnungen ein: [1])

1. Sind F (u), G (u, v), ... Aussagen, die von u, bzw. von u und v, ... abhängen, so bedeute

   „$\forall u$: F (u)": „Für alle u gilt F (u)"

   schärfer

   „$\underset{\in \mathfrak{M}}{\forall u}$: F (u)": „Für alle u aus der Menge $\mathfrak{M}$ gilt F (u)".

   Ähnlich ist

   „$\forall u$, $\forall v$: G (u, v)" oder „$\forall u, v$: G (u, v)", ...

   zu interpretieren.

   „$\exists u$: F (u)": „Es existiert ein u, sodass F (u)", usf.

1) Also keineswegs mit dem Anspruch auf logistische Darstellung, die natürlich ganz anders aussehen müsste.

2. Sind $A_1, A_2, \ldots, A_k$ und B Aussagen, so bedeute

   „$A_1, A_2, \ldots, A_k \longrightarrow B$“: „Aus A_1 und A_2 und ... und A_k folgt B“.

3. Tritt im Laufe eines Beweises ober einem „=“ Zeichen die Nummer einer Formel Definition oder Voraussetzung auf, so bedeutet dies, dass der rechts vom „=“-Zeichen stehende Ausdruck vermöge der Formel aus dem linksstehenden hervorgeht. Z.B. bedeutet

   „$A \overset{(n)}{=} B$“: „B geht vermöge (n) aus A hervor.“

   (Diese Schreibweise soll nur gelegentlich zur Erleichterung der Einsicht verwendet werden, wobei kein Wert auf vollständiges Zitieren aller gerade in Betracht kommenden Voraussetzungen gelegt wird.)

4. „$A \underset{Df}{=} B$“: „B wird durch A definiert“.

5. Ist $\mathfrak{B}$ Punktmenge eines n-dimensionalen euklidisch-metrischen Raumes, so bedeute $J_n[\mathfrak{B}]$ den n-dimensionalen Jordanschen Inhalt von $\mathfrak{B}$.

6. „beschr. $<f(P), \mathfrak{B}>$“: „$f(P)$ ist auf $\mathfrak{B}$ beschränkt“ (d.h. $\underset{>0}{\exists M}, \underset{\in \mathfrak{B}}{\forall P}: |f(P)| \leqslant M$)

7. „stet. $<f(P), \mathfrak{B}>$“: „$f(P)$ ist auf $\mathfrak{B}$ stetig.“

Wir erklären nun

Def. 1. Sei B eine reelle Zahlenmenge, deren Elementen β eindeutig eine Jordan-messbare Punktmenge $\mathfrak{B}(\beta)$ zugeordnet werde. Die Menge all dieser $\mathfrak{B}(\beta)$ werde mit $\mathfrak{b}$ bezeichnet. B′ sei die Menge der Häufungspunkte von B.

Def. 2. Für irgend zwei Elemente β' und β'' aus B bedeute $\mathfrak{D}(\beta', \beta'') \underset{Df}{=} \mathfrak{B}(\beta') - \mathfrak{B}(\beta').\mathfrak{B}(\beta'')$ [1])

1) Wobei $\mathfrak{A}.\mathfrak{B}$ den Durchschnitt der Menge $\mathfrak{A}$ mit der Menge $\mathfrak{B}$ bedeute.

Ich merke an

$$\text{(A. 1.)} \quad \Big\{ \quad \text{Im allgemeinen ist } \mathfrak{D}(\beta', \beta'') \neq \mathfrak{D}(\beta'', \beta')$$

Es bedeute ferner

$$\text{Def. 3.} \quad \left\{ \begin{array}{l} E(\mathfrak{b}) \underset{Df}{=} \forall \underset{\in B}{\beta', \beta''}: J_n\left[\mathfrak{D}(\beta', \beta'')\right] = 0 \\ \text{oder } J_n\left[\mathfrak{D}(\beta'', \beta')\right] = 0 \text{ [1]} \end{array} \right.$$

Es werde nun folgender Hilfssatz bewiesen:

$$\text{(H. S.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \left\{ E(\mathfrak{b}),\ \beta_0 \in B',\ \lim\limits_{\beta \to \beta_0} J_n[\mathfrak{B}(\beta)] = c \text{ (endlich)} \right\} \longrightarrow \\ \left\{ \lim\limits_{\substack{\beta' \to \beta_0 \\ \beta'' \to \beta_0}} J_n[\mathfrak{D}(\beta', \beta'')] = \lim\limits_{\substack{\beta' \to \beta_0 \\ \beta'' \to \beta_0}} J_n[\mathfrak{D}(\beta'', \beta')] = 0 \right\} \\ 2. \left\{ E(\mathfrak{b}),\ \beta_0 \in B\,.\,B',\ \lim\limits_{\beta \to \beta_0} J_n[\mathfrak{B}(\beta)] = J_n[\mathfrak{B}(\beta_0)] \right\} \longrightarrow \\ \left\{ \lim\limits_{\beta \to \beta_0} J_n[\mathfrak{D}(\beta, \beta_0)] = \lim\limits_{\beta \to \beta_0} J_n[\mathfrak{D}(\beta_0, \beta)] = 0 \right\} \end{array} \right.$$

Beweis von (H. S.):

Ad 1.

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}(\beta') = \mathfrak{B}(\beta') \,.\, \mathfrak{B}(\beta'') + \mathfrak{D}(\beta', \beta'') \\ \mathfrak{B}(\beta'') = \mathfrak{B}(\beta') \,.\, \mathfrak{B}(\beta'') + \mathfrak{D}(\beta'', \beta') \end{array} \right.$$

Die Summanden rechts sind elementefremd, daher gilt sicher

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_n[\mathfrak{B}(\beta')] = J_n[\mathfrak{B}(\beta') \,.\, \mathfrak{B}(\beta'')] + J_n[\mathfrak{D}(\beta', \beta'')] \\ J_n[\mathfrak{B}(\beta'')] = J_n[\mathfrak{B}(\beta') \,.\, \mathfrak{B}(\beta'')] + J_n[\mathfrak{D}(\beta'', \beta')] \end{array} \right.$$

Subtraktion und Absolutbetragsbildung ergibt hieraus

$$\left| J_n\left[\mathfrak{B}(\beta')\right] - J_n\left[\mathfrak{B}(\beta'')\right] \right| = \left| J_n\left[\mathfrak{D}(\beta', \beta'')\right] - J_n\left[\mathfrak{D}(\beta'', \beta')\right] \right|$$

daher

$$(3) \quad \left| J_n[\mathfrak{B}(\beta')] - J_n[\mathfrak{B}(\beta'')] \right| \geqslant \begin{array}{l} J_n[\mathfrak{D}(\beta', \beta'')] \\ \text{und} \\ J_n[\mathfrak{D}(\beta'', \beta')] \end{array} \geqslant 0\,.$$

---

[1]) Bekanntlich existieren mit $J_n[\mathfrak{B}_1]$ und $J_n[\mathfrak{B}_2]$ auch $I_n[\mathfrak{B}_1 . \mathfrak{B}_2]$, $J_n[\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_1 . \mathfrak{B}_2]$ und $J_n[\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1 . \mathfrak{B}_2]$.

Wegen der Voraussetzungen unter 1. in (H. S.) gibt es zu dem beliebig gewählten $\varepsilon > 0$ eine reduzierte Umgebung $\mathfrak{U}(\beta_0)$, — das heisst: eine Umgebung von β_0, die nur den Punkt β_0 *nicht* enthält, — sodass für alle β' und $\beta'' \in \mathfrak{U}(\beta_0)$ gilt:

$$(4) \qquad J_n[(\mathfrak{B}(\beta')] - c| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |J_n[\mathfrak{B}(\beta'')] - c| < \frac{\varepsilon}{2},$$

daher, da

$$J_n[\mathfrak{B}(\beta')] - J_n[\mathfrak{B}(\beta'')] = (J_n[\mathfrak{B}(\beta')] - c) - (J_n[\mathfrak{B}(\beta'')] - c)$$

ist,

$$(5) \qquad |J_n[\mathfrak{B}(\beta')] - J_n[\mathfrak{B}(\beta'')]| < \varepsilon.$$

(3), (5) $\longrightarrow$

$$(6) \qquad 0 \leqslant J_n[\mathfrak{D}(\beta', \beta'')] < \varepsilon \quad \text{und} \quad 0 \leqslant J_n[\mathfrak{D}(\beta'', \beta')] < \varepsilon,$$

woraus schliesslich folgt

$$\lim_{\substack{\beta' \to \beta_0 \\ \beta'' \to \beta_0}} J_n[\mathfrak{D}(\beta', \beta'')] = \lim_{\substack{\beta' \to \beta_0 \\ \beta'' \to \beta_0}} J_n[\mathfrak{D}(\beta'', \beta')] = 0.$$

Ad 2.

Setzt man in (3) anstelle von β' und β'': β und β_0, so erhält man

$$(7) \qquad |J_n[\mathfrak{B}(\beta)] - J_n[\mathfrak{B}(\beta_0)]| \geqslant \begin{array}{c} J_n[\mathfrak{D}(\beta, \beta_0)] \\ \text{und} \\ J_n[\mathfrak{D}(\beta_0, \beta)] \end{array} \geqslant 0.$$

Zufolge der Voraussetzungen unter 2. in (H. S.) ergibt $\lim\limits_{\beta \to \beta_0}$ — Bildung des linken Termes von (7) Null, also ist

$$\lim_{\beta \to \beta_0} J_n[\mathfrak{D}(\beta, \beta_0)] = \lim_{\beta \to \beta_0} J_n[\mathfrak{D}(\beta_0, \beta)] = 0.$$

Wir können jetzt den Satz beweisen.

$$\text{Satz 1.}\quad \left\{ \begin{array}{ll} V_{1,1}.^{1)} & E(\mathfrak{h}),\ \beta_0 \in B\,.\,B' \text{ und } \lim\limits_{\beta\to\beta_0} J_n[\mathfrak{B}(\beta)] = J_n[\mathfrak{B}(\beta_0)] \\ V_{1,2}. & \text{beschr.} < f(P),\ \underset{\beta\in B}{V}\mathfrak{B}(\beta) >^{2)} \\ V_{1,3}. & \underset{\in B}{\forall\beta}:\ \exists \int\limits_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P)\,d\tau \\ V_{1,1},\ V_{1,2},\ V_{1,3} & \longrightarrow \lim\limits_{\beta\to\beta_0} \int\limits_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P)\,d\tau = \int\limits_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P)\,d\tau \end{array} \right.$$

Beweis von Satz 1.

Unter Beachtung, dass unter den gemachten Voraussetzungen mit $\int\limits_{\mathfrak{B}} f(P)\,d\tau$, $\int\limits_{\mathfrak{B}_0} f(P)\,d\tau$ auch $\int\limits_{\mathfrak{B}.\mathfrak{B}_0} f(P)\,d\tau$ und $\int\limits_{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}.\mathfrak{B}_0} f(P)\,d\tau$ existiert, hat man mit M als oberer Schranke für $|f(P)|$ in $\underset{\beta\in B}{V}\mathfrak{B}(\beta)$:

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P)\,d\tau - \int\limits_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P)\,d\tau\right| \overset{\text{Def. 2.}}{=} \left|\int\limits_{\mathfrak{B}(\beta)\,.\,\mathfrak{B}(\beta_0)+\mathfrak{D}(\beta,\beta_0)} f(P)\,d\tau - \int\limits_{\mathfrak{B}(\beta)\,.\,\mathfrak{B}(\beta_0)+\mathfrak{D}(\beta_0,\beta)} f(P)\,d\tau\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{\mathfrak{D}(\beta,\beta_0)} f(P)\,d\tau - \int\limits_{\mathfrak{D}(\beta_0,\beta)} f(P)\,d\tau\right| \leqslant \left|\int\limits_{\mathfrak{D}(\beta,\beta_0)} f(P)\,d\tau\right| + \left|\int\limits_{\mathfrak{D}(\beta_0,\beta)} f(P)\,d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant M\left\{J_n[\mathfrak{D}(\beta,\beta_0)] + J_n[\mathfrak{D}(\beta_0,\beta)]\right\},$$

also

$$\left|\int\limits_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P)\,d\tau - \int\limits_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P)\,d\tau\right| \leqslant M\left\{J_n[\mathfrak{D}(\beta,\beta_0)] + J_n[\mathfrak{D}(\beta_0,\beta)]\right\}. \tag{8}$$

Nun verschwindet aber hierin unter Beachtung von $V_{1,1}$ und (H. S.) 2. für $\lim\limits_{\beta\to\beta_0}$-Bildung die rechte Seite, also gilt Gleiches auch

1) $V_{i,k}$ ist die Bezeichnung der rechts stehenden Voraussetzungen.

2) $\underset{\beta\in B}{V}\mathfrak{B}(\beta)$ bedeute die Vereinigungmenge aller $\mathfrak{B}(\beta)$, $\beta\in B$.

für die linke Seite, d.h. es ist

$$\lim_{\beta \to \beta_0} \int\limits_{\mathfrak{B}(\beta)} f(\mathrm{P})\, d\tau = \int\limits_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(\mathrm{P})\, d\tau \;, \qquad \text{w. z. z. w.}$$

Eine Anwendung von Satz 1.

Sei $f(x)$ über $[a, b]$ integrierbar und $\beta_0 \in [a, b]$. Dann gilt

$$\lim_{\beta \to \beta_0} \int_a^{\beta} f(x)\, dx = \int_a^{\beta_0} f(x)\, dx$$

Zum Beweis setze man in Satz 1. für $\mathfrak{B}(\beta) = [a, \beta]$, $\beta_0 \in [a, b]$. Die $\mathfrak{B}(\beta)$ erfüllen dann die Bedingung $\mathrm{E}(\mathfrak{h})$ und es ist $\lim\limits_{\beta \to \beta_0} \mathrm{J}_1 [\mathfrak{B}(\beta)] = \mathrm{J}_1 [\mathfrak{B}(\beta_0)]$, also $\mathrm{V}_{1,1}$ erfüllt. Dass auch $\mathrm{V}_{1,2}$ und $\mathrm{V}_{1,3}$ gelten, ist unmittelbar ersichtlich.

Satz 2.

$\mathrm{V}_{2,1}$. $\mathrm{V}_{1,1}$, $\forall\limits_{\in \mathrm{B}} \beta$: $\mathfrak{B}(\beta) \prec \mathfrak{P}$ und $\mathrm{J}_n(\mathfrak{P}) \neq 0$. [1]

$\mathrm{V}_{2,2}$. beschr. $\langle f(\mathrm{P}, \alpha), \mathfrak{P}, \mathrm{A} \rangle$, wobei $\mathrm{P} \in \mathfrak{P}$ und $\alpha \in \mathrm{A}$ (A reelle Zahlenmenge)

$\mathrm{V}_{2,3}$. $\forall\limits_{\in \mathrm{A}} \alpha$: $\exists \int\limits_{\mathfrak{P}} f(\mathrm{P}, \alpha)\, d\tau$

$\mathrm{V}_{2,4}$. $\forall\limits_{\in \mathfrak{P}} \mathrm{P}$: $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(\mathrm{P}, \alpha) = \varphi(\mathrm{P})$ gleichmässig in P

$\mathrm{V}_{2,5}$. $\exists \int\limits_{\mathfrak{P}} \varphi(\mathrm{P})\, d\tau$.

$\mathrm{V}_{2,1}$: $\mathrm{V}_{2,2}$, $\mathrm{V}_{2,3}$, $\mathrm{V}_{2,4}$, $\mathrm{V}_{2,5} \longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll}
1. & \lim\limits_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \beta \to \beta_1}} \int\limits_{\mathfrak{B}(\beta)} f(\mathrm{P}, \alpha)\, d\tau = \\
2. & \lim\limits_{\beta \to \beta_0} \lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} \int\limits_{\mathfrak{B}(\beta)} f(\mathrm{P}, \alpha)\, d\tau = \\
3. & \lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} \lim\limits_{\beta \to \beta_0} \int\limits_{\mathfrak{B}(\beta)} f(\mathrm{P}, \alpha)\, d\tau =
\end{array}\right\} = \int\limits_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \varphi(\mathrm{P})\, d\tau \,.$$

[1] „$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$" bedeute „$\mathfrak{A}$ ist Teilmenge von $\mathfrak{B}$".

Beweis von Satz 2.

Ad 1.

(9) $$\left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(\mathrm{P}, \alpha)\, d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \varphi(\mathrm{P})\, d\tau \right| = \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} [f - \varphi]\, d\tau + \left[\int_{\mathfrak{B}(\beta)} \varphi\, d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \varphi\, d\tau \right] \right|$$

also mit den Abkürzungen

(10) $$\left\{ \begin{aligned} \Theta(\alpha, \beta) &\underset{\mathrm{D}f}{=} \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(\mathrm{P}, \alpha)\, d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \varphi(\mathrm{P})\, d\tau \right| \\ \Phi(\alpha, \beta) &\underset{\mathrm{D}f}{=} \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} [f(\mathrm{P}, \alpha) - \varphi(\mathrm{P})]\, d\tau \right| \\ \Psi(\beta) &\underset{\mathrm{D}f}{=} \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} \varphi(\mathrm{P})\, d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \varphi(\mathrm{P})\, d\tau \right| , \end{aligned} \right.$$

daher

(11) $$0 \leqslant \Theta(\alpha, \beta) \leqslant \Phi(\alpha, \beta) + \Psi(\beta) .$$

Wir untersuchen erst Φ, dann Ψ.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Ich setze

(12) $$\varepsilon^* \underset{\mathrm{D}f}{=} \frac{\varepsilon}{2 \cdot \mathrm{J}_n(\mathfrak{P})} .$$

Wegen $\mathrm{V}_{2,4}$ gibt es dann eine reduzierte Umgebung $\mathfrak{U}(\alpha_0)$ von α_0, sodass

(13) $$\underset{\in \mathfrak{U}(\alpha_0)}{\forall \alpha} \; \underset{\in \mathfrak{P}}{\forall \mathrm{P}} : |f(\mathrm{P}, \alpha) - \varphi(\mathrm{P})| < \varepsilon^*$$

ausfällt, umsomehr als wegen $\underset{\in \mathrm{B}}{\forall \beta} : \mathfrak{B}(\beta) \prec \mathfrak{B}$

(14) $$\underset{\in \mathfrak{U}(\alpha_0)}{\forall \alpha} \quad \underset{\in \mathrm{B}}{\forall \beta} \quad \underset{\in \mathfrak{B}(\beta)}{\forall \mathrm{P}} : |f(\mathrm{P}, \alpha) - \varphi(\mathrm{P})| < \varepsilon^* ,$$

Das ergibt

(15) $$\underset{\in \mathfrak{U}(\alpha_0)}{\forall \alpha} \quad \underset{\in \mathrm{B}}{\forall \beta} : 0 \leqslant \Phi(\alpha, \beta) \leqslant \mathrm{J}_n[\mathfrak{B}(\beta)] \cdot \varepsilon^* \leqslant \mathrm{J}_n(\mathfrak{P}) \cdot \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2} ,$$

also

(*a*) $$\left\{ \underset{\in \mathfrak{U}(\alpha_0)}{\forall \alpha} \quad \underset{\in \mathrm{B}}{\forall \beta} : 0 \leqslant \Phi(\alpha, \beta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} . \right.$$

Aus $\mathrm{V}_{2,2}$ folgt auch für die Limesfunktion $\varphi(\mathrm{P})$:

(16) beschr. $< \varphi(\mathrm{P}), \mathfrak{P} >$, umsomehr also wegen $\mathrm{V}_{2,1}$:

(17) $$\text{beschr.} < \varphi(\mathrm{P}), \bigvee_{\beta \in \mathrm{B}} \mathfrak{B}(\beta) > .$$

Wegen $V_{2,5}$ gilt auch

(18) $\quad \underset{\in B}{\forall\beta}: \exists \int_{\mathfrak{B}(\beta)} \varphi(P)\, d\tau .$

(17) besagt, dass $V_{1,2}$ für $\varphi(P)$, (18) dass $V_{1,3}$ erfüllt ist, aber auch $V_{1,1}$ ist wegen $V_{2,1}$ für $\varphi(P)$ erfüllt.

Satz 1. auf $\varphi(P)$ angewendet ergibt daher

(19) $\quad \lim\limits_{\beta \to \beta_0} \int_{\mathfrak{B}(\beta)} \varphi(P)\, d\tau = \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \varphi(P)\, d\tau$, d.h.

(20) $\quad \lim\limits_{\beta \to \beta_0} \Psi(\beta) = 0;$

oder, was damit gleichwertig ist:

(b) $\begin{cases} \text{Es gibt eine reduzierte Umgebung } \mathfrak{U}(\beta_0) \text{ von } \beta_0, \text{ sodass} \\ \underset{\in \mathfrak{U}(\beta_0)}{\forall\beta}: 0 \leqslant \Psi(\beta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} . \end{cases}$

(a), (b) $\longrightarrow$

(21) $\quad \underset{\in \mathfrak{U}(\alpha_0)}{\forall\alpha} \ \underset{\in \mathfrak{U}(\beta_0)}{\forall\beta} : 0 \leqslant \Phi(\alpha, \beta) + \Psi(\beta) < \varepsilon .$

Wegen (11) gilt also auch

(22) $\quad \underset{\in \mathfrak{U}(\alpha_0)}{\forall\alpha} \ \underset{\in \mathfrak{U}(\beta_0)}{\forall\beta} : 0 \leqslant \Theta(\alpha, \beta) < \varepsilon ,$

d.h. $\lim\limits_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \beta \to \beta_0}} \Theta(\alpha, \beta) = 0$, somit nach (10):

$$\lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \beta \to \beta_0}} \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P, \alpha)\, d\tau = \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \varphi(P)\, d\tau ,$$

also Satz 2., 1.

Ad 2.

Die für $f(P, \alpha)$ und $\varphi(P)$ gemachten Voraussetzungen $V_{2,3}$, $V_{2,4}$ und $V_{2,5}$ ermöglichen die Anwendung eines bekannten Vertauschungssatzes, wonach

(23) $\quad \lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P, \alpha) = \int_{\mathfrak{B}(\beta)} \varphi(P)\, d\tau$

und also auch

(24) $\quad \lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P, \alpha)\, d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \varphi(P)\, d\tau \right| = \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} \varphi(P)\, d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \varphi(P)\, d\tau \right| = \Psi(\beta)$

gilt.

Nochmalige Limitation hierin nach β liefert

$$\lim_{\beta\to\beta_0}\lim_{\alpha\to\alpha_0} \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P,\alpha)\,d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \varphi(P)\,d\tau \right| = \lim_{\beta\to\beta_0} \Psi(\beta) \overset{(20)}{=} 0,$$

was angesichts dessen, dass $\int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \varphi(P)\,d\tau$ eine Konstante ist, die Behauptung unter Satz 2., 2. ergibt.

Ad 3.

$f(P,\alpha)$ erfüllt zunächst $V_{1,2}$ und $V_{1,3}$ von Satz 1. für alle α, desgleichen aber auch $V_{1,3}$, dies, da aus $V_{2,3}$ auch

$$\forall_{\alpha\in A}\ \forall_{\beta\in B}: \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P,\alpha)\,d\tau$$

folgt. In Satz 1. anstelle von $f(P)$: $f(P,\alpha)$ gesetzt, führt auf

$$\lim_{\beta\to\beta_0} \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P,\alpha)\,d\tau = \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P,\alpha)\,d\tau\,, \tag{25}$$

sodass auch

$$\lim_{\beta\to\beta_0} \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta)} f(P,\alpha)\,d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \varphi(P)\,d\tau \right| = \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P,\alpha)\,d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \varphi(P)\,d\tau \right| \tag{26}$$

wird. Aus denselben Gründen, die (23) legitimierten, trifft wieder

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P,\alpha)\,d\tau = \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \varphi(P)\,d\tau \text{ zu.} \tag{27}$$

(26), (27) $\longrightarrow$

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\lim_{\beta\to\beta_0} \left| \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P,\alpha)\,d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \varphi(P)\,d\tau \right| = \left| \lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} f(P,\alpha)\,d\tau - \int_{\mathfrak{B}(\beta_0)} \varphi(P)\,d\tau \right| = 0\,,$$

d.h., es gilt auch Satz 2., 2.

(A. 2.)

1. Setzt man in Satz 2. $A = B$ und lässt α_0 mit β_0 zusammenfallen, so erhält man unter im übrigen gleichen Voraussetzungen wie dort

   $$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_{\mathfrak{B}(\alpha)} f(P,\alpha)\,d\tau = \int_{\mathfrak{B}(\alpha_0)} \varphi(P)\,d\tau\,.$$

   (Eine bekannte Beziehung.)
2. Satz 1. stellt einen Spezialfall von Satz 2. dar.

Führt man die Definition ein:

$$E^*(\mathfrak{b}) =_{\mathrm{Df}} \forall_{\in B} \beta', \beta'': \{\mathfrak{B}(\beta') \prec \mathfrak{B}(\beta'') \quad \text{oder} \quad \mathfrak{B}(\beta'') \prec \mathfrak{B}(\beta')\},$$

so gilt die manchmal nützliche Beziehung

(A. 3.) $\{ E^*(\mathfrak{b}) \longrightarrow E(\mathfrak{b})$

wie die folgenden Überlegungen sofort lehren:

$$E^*(\mathfrak{X}) \rightarrow \text{„}\mathfrak{D}(\beta', \beta'') = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{D}(\beta'', \beta') = 0\text{“} \longrightarrow$$
$$\text{„}I_n[(\beta', \beta'')] = 0 \quad \text{oder} \quad I_n[(\beta'', \beta')] = 0\,.$$

Schliesslich können wir noch aufgrund von Satz 2. beweisen:

(A. 4.)

V_I. stet. $< f(x, \alpha), [a, b], A >$ und beschr. $< f(x, \alpha), [a, b], A >$

V_{II}. stet. $<\varphi(\beta), B>$, stet. $<\Phi(\gamma), C>$ und $\forall_{\in B} \beta = \varphi(\beta)\, \varepsilon\, [a, b]$, $\forall_{\in C} \gamma = \Phi(\gamma)\, \varepsilon\, [a, b]$

V_{III}. $\alpha_0\, \varepsilon\, A\,.\,A'$, $\beta_0\, \varepsilon\, B\,.\,B'$, $\gamma_0\, \varepsilon\, C\,.\,C'$

V_{IV}. $\forall_{\in[a,b]} x$: $\lim_{\alpha \to \alpha_0} f(x, \alpha) = f(x, \alpha_0)$ gleichmässig in x.

$V_I, V_{II}, V_{III}, V_{IV} \longrightarrow$

$$\text{(F)} \lim_{\delta_1 \to \delta_{10}} \lim_{\delta_2 \to \delta_{20}} \lim_{\delta_3 \to \delta_{30}} \int_{\varphi(\beta)}^{\Phi(\gamma)} f(x, \alpha)\, dx =$$
$$= \lim_{\substack{\alpha \to \alpha_0 \\ \beta \to \beta_0 \\ \gamma \to \gamma_0}} \int_{\varphi(\beta)}^{\Phi(\gamma)} f(x, \alpha)\, dx = \int_{\varphi(\beta_0)}^{\Phi(\gamma_0)} f(x, \alpha_0)\, dx\,,$$

worin $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ bzw. $(\delta_{10}, \delta_{20}, \delta_{30})$ eine beliebige Anordnung der drei Parameter α, β, γ, bzw. von α_0, β_0, γ_0 ist.

Beweis von (A. 4.).

Es ist, wenn $c\, \varepsilon\, (a, b)$:

$$\int_{\varphi(\beta)}^{\Phi(\gamma)} f(x, \alpha)\, dx = \int_{\varphi(\beta)}^{C} f(x, \alpha)\, dx + \int_{C}^{\Phi(\gamma)} f(x, \alpha)\, dx\,. \tag{28}$$

Ich betrachte zuerst $\int_{\varphi(\beta)}^{C} f(x, \alpha)\, dx$.

Die Mengen B (β) sind hier durch die von β abhängigen Integrationsintervalle $[\varphi(\beta), c]$, bzw. $[c, \varphi(\beta)]$ gegeben und erfüllen offenbar die Voraussetzung $V_{2,1}$; ebenso erfüllt $f(x, \alpha)$ aufgrund der für sie gemachten Voraussetzungen die entsprechenden Voraussetzungen von Satz 2, wenn man dort x anstelle von P und $f(x, \alpha_0)$ anstelle von φ (P) schreibt. Daher ist nach Satz 2.:

$$(29)\quad \lim_{\substack{\alpha\to\alpha_0\\ \beta\to\beta_0}} \int_{\varphi(\beta)}^{C} f(x,\alpha)\,dx = \lim_{\alpha\to\alpha_0}\lim_{\beta\to\beta_0}\int_{\varphi(\beta)}^{C} f(x,\alpha)\,dx = \lim_{\beta\to\beta_0}\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_{\varphi(\beta)}^{C} f(x,\alpha)\,dx = \int_{\varphi(\beta_0)}^{C} f(x,\alpha_0)\,dx\,.$$

Da hierin sämtliche Ausdrücke von γ unabhängig sind, folgt aus (29) weiter durch γ = Limitation:

$$(30)\quad \lim_{\substack{\alpha\to\alpha_0\\ \beta\to\beta_0\\ \gamma\to\gamma_0}} \int_{\varphi(\beta)}^{C} f(x,\alpha)\,dx = \lim_{\delta_1\to\delta_{10}}\lim_{\delta_2\to\delta_{20}}\lim_{\delta_3\to\delta_{30}}\int_{\varphi(\beta)}^{C} f(x,\alpha)\,dx = \int_{\varphi(\beta_0)}^{C} f(x,\alpha_0)\,dx\,.$$

Ganz ebenso verfährt man mit dem zweiten Integral der rechten Seite von (28) und erhält

$$(31)\quad \lim_{\substack{\alpha\to\alpha_0\\ \beta\to\beta_0\\ \gamma\to\gamma_0}} \int_{C}^{\Phi(\gamma)} f(x,\alpha)\,dx = \lim_{\delta_1\to\delta_{10}}\lim_{\delta_2\to\delta_{20}}\lim_{\delta_3\to\delta_{30}}\int_{C}^{\Phi(\gamma)} f(x,\alpha)\,dx = \int_{C}^{\Phi(\gamma_0)} f(x,\alpha_0)\,dx\,.$$

(30), 31 $\longrightarrow$ (A. 4.), w. z. z. w.