§ 1. Définition. Enoncé de théorèmes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

SUR LES COURBES LIMITES DE POLYGONES OBTENUS PAR TRISECTION

par Georges DE RHAM (Lausanne)

(Reçu le 25 octobre 1958)

§ 1. DEFINITION. ENONCÉ DE THÉORÈMES.

Soit P une ligne polygonale à n côtés, de sommets S_0, S_1, ..., S_n. Sur le côté $S_i\, S_{i+1}$, considérons les points S'_{2i} et S'_{2i+1} qui le divisent en trois segments $S_i\, S'_{2i}$, $S'_{2i}\, S'_{2i+1}$, $S'_{2i+1}\, S_{i+1}$ proportionnels à trois nombres positifs donnés β_1, α, β_2 de somme 1,

$$\beta_1 + \alpha + \beta_2 = 1 \, .$$

Les points S'_0, S'_1, ..., S'_{2n-1} sont les sommets d'une nouvelle ligne polygonale P' à $2n - 1$ côtés.

Nous appelons *trisection* l'opération faisant passer de P à P'. Cette opération est complètement déterminée par la donnée des nombres

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\alpha} \, , \qquad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\alpha}$$

que nous appellerons *les rapports de la trisection.* Ce sont deux nombres positifs qui peuvent être choisis arbitrairement.

Il est clair que le point M qui divise le côté $S_i\, S_{i+1}$ de P en deux segments $S_i\, M$ et MS_{i+1} proportionnels à β_1 et β_2 divise aussi le côté $S'_{2i}\, S'_{2i+1}$ de P' en deux segments proportionnels à β_1 et β_2 (fig. 1). Autre remarque évidente qui sera utile: si la longueur des côtés de P ne dépasse pas l, la longueur des côtés de P' ne dépasse pas le plus grand des nombres αl et $(\beta_1 + \beta_2)\, l$.

Partons d'une ligne polygonale P_0 à deux côtés et répétons cette opération. On obtient une suite de lignes polygonales P_n à $2^n + 1$ côtés ($n = 0, 1, 2, \ldots$), P_{n+1} se déduisant de P_n par une trisection de rapports donnés indépendants de n. Toutes ces lignes polygonales sont convexes et elles tendent vers une courbe limite C que nous nous proposons d'étudier.

Soient S_i^n $(i = 0, 1, ..., 2^n + 1)$ les sommets de P_n. D'après la première remarque ci-dessus, le point M qui divise le côté $S_h^n S_{h+1}^n$ de P_n dans le rapport $\beta_1 : \beta_2$, divise dans le même rapport le côté $S_{2h}^{n+1} S_{2h+1}^{n+1}$ de P_{n+1} et aussi d'une manière générale le côté $S_{2^k h}^{n+k} S_{2^k h+1}^{n+k}$ de P_{n+k}. Appartenant à tous les polygones P_{n+k} $(k = 0, 1, 2, ...)$, ce point appartient aussi à la courbe C

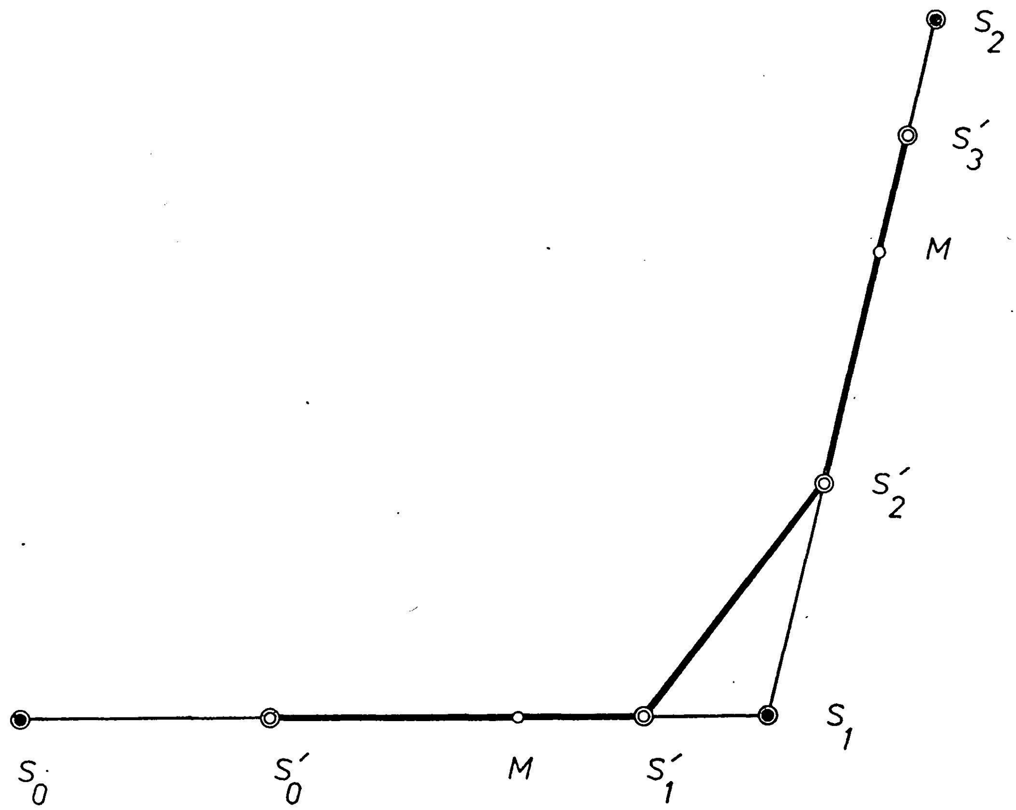

Fig. 1.

et comme il est bien déterminé par la fraction binaire $h2^{-n}$, nous le désignerons par $M(h2^{-n})$.

D'après la seconde remarque ci-dessus, si l est le plus grand côté de P_0, la longueur des côtés de P_n ne dépasse pas $l\rho^n$, où $\rho = \sup\{\beta_1 + \beta_2, \alpha\} < 1$, et il en est de même pour la distance des points $M(h2^{-n})$ et $M(h2^{-n} + 2^{-n})$. Cela entraîne que l'ensemble des points $M(h2^{-n})$ associés aux fractions binaires $h2^{-n}$ est dense sur la courbe C et que l'application $h2^{-n} \rightarrow M(h2^{-n})$ est uniformément continue et se prolonge par suite en une application continue $t \rightarrow M(t)$ de l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$ sur la courbe C, qui se trouve ainsi paramétrisée d'une manière naturelle.

Introduisons un système de coordonnées cartésiennes Oxy, tel que $M(0) = (0, 0)$, $M(1) = (1, 1)$ et $S_1^0 = (1, 0)$. Le premier côté de P_0 est alors sur Ox et le second côté de P_0 sur la droite d'équation $x = 1$ (fig. 2). On désignera par $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées de $M(t)$. Ce sont des fonctions continues de t, qui croissent de 0 à 1 lorsque t croît de 0 à 1.

Les polygones P_n étant tous convexes, la courbe C est aussi convexe. Par suite, elle a en chaque point $M(t)$ une tangente à

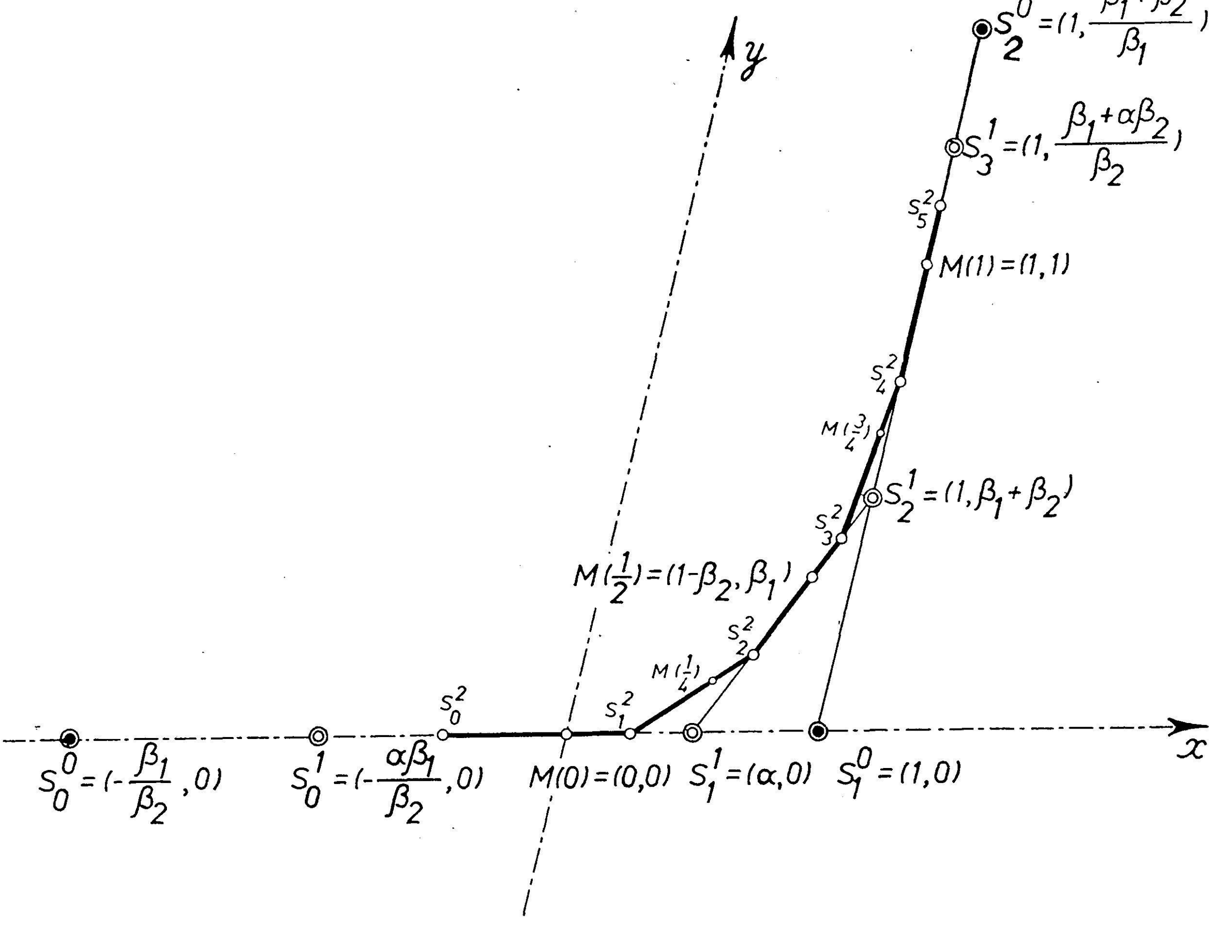

Fig. 2.

droite et une tangente à gauche, et sauf éventuellement aux points d'un ensemble au plus dénombrable, ces deux tangentes coïncident en une tangente unique. Nous désignerons le coefficient angulaire de cette tangente par $m(t)$. C'est une fonction croissante de t, parce que C est convexe. Aux points anguleux correspondent des discontinuités de première espèce de $m(t)$, les coefficients angulaires des tangentes à droite et à gauche étant $m(t+0)$ et $m(t-0)$. Si $t = h2^{-n}$ est une fraction binaire, le côté de P_n qui contient $M(h2^{-n})$, ne traversant pas C, a un coefficient angulaire égal à $m(h2^{-n})$ si $M(h2^{-n})$ n'est pas un point anguleux et compris entre $m(h2^{-n} - 0)$ et $m(h2^{-n} + 0)$ si $\mathrm{M}(h2^{-n})$ est un point anguleux; dans ce dernier cas, *nous conviendrons de définir* $\mathrm{m}(h2^{-n})$ *en le posant égal au coefficient angulaire du côté de* P_n *qui contient* $\mathrm{M}(h2^{-n})$. Le point $\mathrm{M}(t)$ n'étant jamais un point anguleux si t n'est pas une fraction binaire, comme on verra, il en résultera que $m(t)$ est univoquement définie dans tout l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$. On a $m(0) = 0$, $m(1) = \infty$ et pour $0 < t < 1$, $m(t)$ est fini > 0.

Dans cet article, je me propose d'établir quelques propriétés des fonctions $m(t)$, $m(x)$, $x(t)$ et $y(t)$, qui sont énoncées dans les théorèmes suivants.

I. *La fonction* $\mathrm{m}(\mathrm{t})$ *est continue pour toute valeur de* t *qui n'est pas une fraction binaire. Pour toute fraction binaire* t, $0 \leqslant \mathrm{t} < 1$ *(resp.* $0 < \mathrm{t} \leqslant 1$*), la fonction* $\mathrm{m}(\mathrm{t})$ *est continue ou discontinue à droite (resp. à gauche) selon que* $\gamma_1 \leqslant 1$ *ou* $\gamma_1 > 1$ *(resp.* $\gamma_2 \leqslant 1$ *ou* $\gamma_2 > 1$*).*

La première assertion entraîne que $m(t)$ est univoquement défini dans tout l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 1$, comme il a été dit. La seconde assertion montre que, si $\gamma_1 \leqslant 1$ et $\gamma_2 \leqslant 1$, la courbe C n'a pas de points anguleux, tandis que si $\gamma_1 > 1$ ou $\gamma_2 > 1$, elle a une infinité de points anguleux: tous les points $\mathrm{M}(t)$ pour lesquels t est une fraction binaire, $0 < t < 1$.

II. *Sauf dans le cas où* $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$, *la fonction* $\mathrm{m}(\mathrm{t})$ *n'a pour aucune valeur de* t *une dérivée non nulle.*

La dérivée de $m(t)$ est donc nulle partout où elle existe, et comme elle existe presque partout, d'après un théorème bien connu de Lebesgue, $m(t)$ est une fonction singulière. En considérant m comme fonction de x, on a une fonction $m(x)$ qui jouit aussi de cette propriété.

III. *Sauf dans le cas ou* $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$, *la fonction* $\mathrm{m}(\mathrm{x})$ *n'a pour aucune valeur de* x *une dérivée non nulle.*

La fonction $m(x)$ est donc aussi une fonction singulière, ce qui signifie que *la courbure de* C *est presque partout nulle.*

IV. *Si* $\gamma_1 + \gamma_2 \neq 1$, *la fonction* $ax(t) + by(t)$, *où* a *et* b *sont des constantes, n'a pour aucune valeur de* t *une dérivée non nulle.*

Cela s'applique en particulier aux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ qui sont par suite des fonctions singulières. Mais il n'en est plus ainsi lorsque $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$.

V. *Si* $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, *les fonctions* $x(t)$ et $y(t)$ *sont liées par la relation*

$$\gamma_2 x(t) + \gamma_1 y(t) = t$$

et elles ont des dérivées premières continues

$$x'(t) = \frac{1}{\gamma_2 + \gamma_1 m(t)}, \quad y'(t) = \frac{m(t)}{\gamma_2 + \gamma_1 m(t)}.$$

En vertu de II, si $\gamma_1 = 1 - \gamma_2 \neq \frac{1}{2}$ ces dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ sont des fonctions singulières.

Le cas où $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$ est effectivement exceptionnel; alors $x = 2t - t^2$, $y = t^2$, $m = \frac{t}{1-t}$ et la courbe C est une parabole.

Dans un article antérieur *), j'ai établi I pour le cas où $\gamma_1 = \gamma_2$ et II, III et IV pour le cas où $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, en utilisant des équations fonctionnelles vérifiées par $M(t)$. Je traiterai ici le cas général par une méthode directe et plus simple. Ensuite, revenant sur les équations fonctionnelles, je montrerai que, dans le cas où $\gamma_1 = 1 - \gamma_2 \neq \frac{1}{2}$, les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$ se réduisent essentiellement à une fonction singulière très simple et connue.

§ 2. Démonstration des théorèmes.

Désignons par $Q_{n,h}$ la projection du côté $S_h^n S_{h+1}^n$ de P_n, faite parallèlement à une droite donnée quelconque sur une autre

*) « Sur une courbe plane », *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, *39* (1956), pp. 25-42. Voir aussi sur le même sujet: « Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane », *Elemente der Mathematik*, *2* (1947), pp. 73-76 et 89-97; ainsi que: « Sur quelques courbes définies par des équations fonctionnelles », *Rendiconti del Seminario Matematicà dell' Università e del Politecnico di Torino*, *16* (1957), pp. 101-113.