§ 3. Equations fonctionnelles.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

§ 3. Equations fonctionnelles.

Considérons la transformation linéaire F_0 du plan en lui-même qui change S_i^0 en S_i^1 ($i = 0, 1, 2$). Elle change S_h^n en S_h^{n+1} ($h = 0, 1, ..., 2^n$), comme on le vérifie immédiatement par récurrence. Par suite, elle change $M(h2^{-n})$ en $M(h2^{-n-1})$ et l'on en déduit, par continuité, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$F_0 M(t) = M\left(\frac{t}{2}\right).$$

D'une manière analogue, si F_1 est la transformation linéaire du plan en lui-même qui change S_i^0 en S_{i+1}^0 ($i = 0, 1, 2$), on voit que

$$F_1 M(t) = M\left(\frac{1+t}{2}\right).$$

Il est facile de calculer les coordonnées (x_a, y_a) de l'image du point (x, y) par la transformation F_a ($a = 0, 1$), ainsi que le coefficient angulaire m_a de l'image d'une droite de coefficient angulaire m; on trouve:

$$\left\{\begin{aligned} x_0 &= \alpha x + \beta_1 y\,, \\ y_0 &= \beta_1 y\,, \\ m_0 &= \frac{\gamma_1 m}{1 + \gamma_1 m}\,, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \beta_2 x + 1 - \beta_2\,, \\ y_1 &= \beta_2 x + \alpha y + \beta_1\,, \\ m_1 &= \frac{\gamma_2 + m}{\gamma_2}. \end{aligned}\right.$$

On a, par suite, les équations fonctionnelles

$$\left.\begin{aligned} x\left(\frac{t}{2}\right) &= \alpha x(t) + \beta_1 y(t) & x\left(\frac{1+t}{2}\right) &= \beta_2 x(t) + 1 - \beta_2 \\ y\left(\frac{t}{2}\right) &= \beta_1 y(t) & y\left(\frac{1+t}{2}\right) &= \beta_2 x(t) + \alpha y(t) + \beta_1 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ainsi que

$$m\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\gamma_1 m(t)}{1 + \gamma_1 m(t)}, \qquad m\left(\frac{1+t}{2}\right) = \frac{\gamma_2 + m(t)}{\gamma_2}.$$

J'ai établi et utilisé ces équations fonctionnelles, pour le cas où $\gamma_1 = \gamma_2$, dans l'article de 1956 cité plus haut. Considérons ici le cas particulier où

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1 \left(\text{et } \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\gamma_1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{\gamma_2}{2}\right).$$

Comme

$$\gamma_2 x'(t) + \gamma_1 y'(t) = 1 ,$$

on peut poser

$$\gamma_1 y'(t) = f(t) , \qquad \gamma_2 x'(t) = 1 - f(t).$$

Par substitution dans les relations dérivées de (13), il vient

$$f\left(\frac{t}{2}\right) = \gamma_1 f(t) , \qquad f\left(\frac{1+t}{2}\right) = \gamma_1 + (1 - \gamma_1) f(t) .$$

J'ai montré que $f(t)$ est la seule fonction bornée satisfaisant à ces équations, ce qui en fournit une définition très simple, et pour $\gamma_1 \neq \frac{1}{2}$ c'est une fonction singulière déjà étudiée par plusieurs auteurs (voir mon article de 1957 cité plus haut, où l'on trouvera aussi quelques indications bibliographiques).