

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 5 (1959)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR L'EXEMPLE, DONNÉ PAR M. DE RHAM, D'UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE  
**Kapitel:** 1. Points où  $f$  admet un extremum.  
**Autor:** Kahane, Jean-Pierre  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-35474>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

1. POINTS OÙ  $f$  ADMET UN EXTREMUM.

Soit

$$x = \dots, x_1 x_2 \dots x_n \dots \quad (2)$$

un développement de  $x$  en numération binaire (il y en a deux quand  $x$  est un nombre binaire), et soit

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n 2^{-k} \varphi(2^k x). \quad (3)$$

*Minima relatifs.*

Si  $a = \dots, a_1 a_2 \dots a_n = p2^{-n}$  ( $p$  entier), on a  $f_{n-1}(a) = f_n(a) = \dots = f(a)$  et réciproquement. Pour  $m$  assez grand ( $m \geq 2n$ ),  $f_m$  admet en  $a$  un minimum relatif; comme  $f \geq f_m$  et  $f(a) = f_m(a)$ ,  $f$  admet également en  $a$  un minimum relatif. Inversement, si  $f(x)$  est le minimum de  $f$  sur un segment  $[a, a'] = [p2^{-n}, (p+1)2^{-n}]$ ,  $n$  impair, les relations

$$f(x) \geq f_{n-1}(x), \quad f(a) = f_{n-1}(a), \quad f(a') = f_{n-1}(a')$$

jointes au fait que  $f_{n-1}$  est linéaire et non constant sur  $[a, a']$ , entraînent que  $x = a$  ou  $x = a'$ .

Donc l'ensemble des points où  $f$  admet un minimum relatif est l'ensemble des nombres binaires  $p2^{-n}$ . C'est un ensemble dénombrable, dense sur la droite.

*Maximum.*

On a  $f(x) = \sum_0^{\infty} 4^{-k} f_1(4^k x)$ . Or  $f_1(4^k x)$  est maximum, et égal à 1, si et seulement si  $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$  (pour au moins un développement de  $x$  sous la forme (2)).

Donc l'ensemble des points où  $f$  atteint son maximum, égal à  $4/3$ , est l'ensemble des  $x$ , de la forme (2), satisfaisant  $x_{2k+1} + x_{2k+2} = 1$  pour  $k = 0, 1, \dots$ . C'est un ensemble parfait totalement discontinu, de mesure nulle.

*Maxima relatifs.*

On a

$$f(x) = f_{2^{n-1}}(x) + \sum_{k=n}^{\infty} 4^{-k} f_1(4^k x). \quad (4)$$

Pour que  $x$  soit un point où  $f$  admet un maximum relatif, il suffit donc que  $f_{2^{n-1}}$  soit constant au voisinage de  $x$ , et que  $f_1(4^k x) = 1$  pour  $k \geq n$ ; la première condition équivaut à  $x_1 + x_2 + \dots + x_{2^n} = n$ , la seconde, comme on l'a vu, à  $x_{2^{k+1}} + x_{2^{k+2}} = 1$  ( $k \geq n$ ).

Inversement, soit  $x$  un point où  $f$  admet un maximum relatif, il admet un développement unique de la forme (2); je dis qu'il existe une infinité de valeurs de  $n$  pour lesquelles  $x_1 + x_2 + \dots + x_{2^n} = n$ . Sinon, en effet,  $f'_n(x) = 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n$  garde un signe constant pour  $n$  assez grand, soit, pour fixer les idées, le signe  $+$ ; soit  $I_n$  le segment rectiligne du graphe de  $f_{n-1}$  qui se projette sur l'axe des  $x$  suivant le segment  $[p2^{-n}, (p+1)2^{-n}]$  contenant  $x$ ; pour  $n$  assez grand,  $I_{n+1}$  est à gauche de  $I_n$ , donc  $I_{n+j}$  est à gauche de  $I_n$  ( $j \geq 1$ ), donc le point  $(x, f(x))$  est à gauche de  $I_n$ ; comme  $I_n$  est une corde du graphe de  $f$ ,  $f(x)$  n'est pas un maximum relatif, contrairement à l'hypothèse. Il existe donc un  $n$  tel que  $x_1 + x_2 + \dots + x_{2^n} = n$ , et tel que, sur l'intervalle contenant  $x$  où  $f_{2^{n-1}}$  est constant,  $f(x)$  soit le maximum de  $f$ . D'après (4), il s'ensuit que  $f_1(4^k x) = 1$  pour  $k \geq n$ .

Ainsi, l'ensemble des points où  $f$  admet un maximum relatif est l'ensemble des  $x$ , de la forme (2), satisfaisant les égalités  $x_1 + x_2 + \dots + x_{2^k} = k$  pour  $k$  assez grand. C'est un  $F_\sigma$ , dense sur la droite, de mesure nulle.

2. EXEMPLE D'UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE, DONT LE MODULE DE CONTINUITÉ SATISFAIT  $\omega(h) \leq \chi(h)$ ,  $\chi$  ÉTANT UNE FONCTION DONNÉE.

Si  $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \chi(h) < \infty$ , l'inégalité  $\omega(h) \leq \chi(h)$  entraîne que la fonction est lipschitzienne <sup>2)</sup>, donc admet une dérivée presque

<sup>2)</sup> En vertu de l'inégalité  $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta)$ , valable pour tout  $\delta > 0$  et tout entier naturel  $n$ .