

3. Exemple d'une fonction continue, dont le module de continuité en chaque point est minoré par une fonction DONNÉE.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

partout. Nous devons donc supposer, pour construire notre exemple, que $\lim_{h \rightarrow \infty} h^{-1} \chi(h) = \infty$. Moyennant cette hypothèse, la construction est possible.

Considérons en effet

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-k_{\nu}} \varphi(2^{k_{\nu}} x) \quad (5)$$

où k_{ν} est une suite d'entiers croissants à déterminer. Le raisonnement de M. de Rham montre que g n'est dérivable en aucun point.

D'autre part

$$|g(x+h) - g(x)| < \nu h + 2 \cdot 2^{-k_{\nu}+1} \text{ pour tout } \nu.$$

Soit $\omega(h)$ le module de continuité de g ; pour $2^{-k_{\nu}+1} \leq h < 2^{-k_{\nu}}$, on a $\omega(h) < (\nu + 2)h$.

Quitte à diminuer $\chi(h)$, on peut supposer $h^{-1} \chi(h) \uparrow \infty$ et $\chi(h) \downarrow 0$ quand $h \downarrow 0$. Il suffit alors de choisir $\{k_{\nu}\}$ de sorte que $\nu + 2 < 2^{k_{\nu}} \chi(2^{-k_{\nu}})$ pour avoir $\omega(h) < \chi(h)$ pour tout $h > 0$.

Ainsi, dans toute classe de fonctions, définie par une majoration des modules de continuité, et contenant des fonctions non lipschitziennes, il existe des fonctions n'admettant de dérivées en aucun point.

3. EXEMPLE D'UNE FONCTION CONTINUE, DONT LE MODULE DE CONTINUITÉ EN CHAQUE POINT EST MINORÉ PAR UNE FONCTION DONNÉE.

Soit $h > 0$, $\psi(h)$ une fonction positive tendant vers zéro quand $h \downarrow 0$. Nous allons construire une fonction continue dont le module de continuité $\omega_x(h)$ satisfait en chaque point x

$$\omega_x(h) > \psi(h) \quad (6)$$

quitte à majorer $\psi(h)$, on peut supposer ψ croissante.

Considérons

$$g_1(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{\nu} 2^{-k_{\nu}} \varphi(2^{k_{\nu}} x) \quad (7)$$

où $\{k_\nu\}$ et $\{p_\nu\}$ sont des suites croissantes de nombres positifs, à déterminer. Vu la croissance de ψ , (6) est satisfaite dès que, pour tout ν ,

$$\omega_x(2^{-k_\nu}) > \psi(2^{-k_{\nu-1}}) = \varepsilon_\nu. \quad (8)$$

Or un calcul immédiat donne

$$\omega_x(2^{-k_\nu}) > 2^{-k_\nu} \left(\frac{1}{4} p_\nu - p_{\nu-1} - p_{\nu-2} \dots - p_1 \right) - \sum_{\nu+1}^{\infty} p_j 2^{-k_j}.$$

Donc (8) est vérifiée dès que, pour chaque j , on a

$$p_j > 13 p_{j-1}$$

$$\left(\text{ce qui entraîne } p_{\nu-1} + p_{\nu-2} + \dots + p_1 < \frac{1}{12} p_\nu \right)$$

$$p_{j+1} 2^{-k_{j+1}} < \frac{1}{13} p_j 2^{-k_j}$$

$$\left(\text{ce qui entraîne } \sum_{\nu+1}^{\infty} p_j 2^{-k_j} < \frac{1}{12} p_\nu 2^{-k_\nu} \right)$$

$$p_j 2^{-k_j} \geq 12 \varepsilon_j$$

Pour cela, il suffit de choisir k_j de sorte que 1° $\varepsilon_{j+1} < \frac{1}{13} \varepsilon_j$; 2° $2^{k_j} \varepsilon_j > 13 2^{k_{j-1}} \varepsilon_{j-1}$ (ces inégalités permettent le choix de k_j , une fois fixés k_{j-1} et k_{j-2}), puis, de choisir $p_j = 12 \cdot 2^{k_j} \varepsilon_j$.

Le lecteur aura remarqué que dans ce § 3 la fonction φ pourrait être remplacée par n'importe quelle fonction périodique lipschitzienne, non constante. En fait, les considérations du § 3 se rattachent autant à l'exemple classique de Weierstrass qu'à celui de M. de Rham, au contraire de celles du § 2.