Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 5 (1959)
Heft: 2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'EXISTENCE D'UNE SPHÈRE PASSANT PAR UN NOMBRE DONNÉ DE POINTS AUX COORDONNÉES ENTIÈRES

Autor: Kulikowski, Thadée

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35479

SUR L'EXISTENCE D'UNE SPHÈRE PASSANT PAR UN NOMBRE DONNÉ DE POINTS AUX COORDONNÉES ENTIÈRES

par Thadée KULIKOWSKI, Varsovie

(Reçu le 29 janvier 1958.)

Le but de cette Note est de démontrer ce

THÉORÈME : m *étant un nombre naturel* $\geqslant 3$ *et* n *un nombre naturel quelconque, il existe dans l'espace euclidien à* m *dimension une sphère* $\sum_{i=1}^{m} (x_i - a_i)^2 = r^2$ *passant précisément par* n *points aux coordonnées entières* $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Démonstration. — Comme l'a démontré M. A. SCHINZEL dans la Note précédente, il existe pour le nombre naturel n donné des nombres rationnels a_1, a_2 et c tels que l'équation

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = c \tag{1}$$

a précisément n solutions en nombres entiers x_1 et x_2.

Or, comme on sait, il existe des nombres irrationnels $a_3, a_4, \ldots, a_m$ tels que le nombre $\sum_{i=3}^{m} c_i a_i$, où c_i $(i = 3, 4, \ldots, m)$ sont des nombres rationnels, est rationnel seulement si $c_3 = \ldots = c_m = 0$ (c'est-à-dire que les nombres $a_3, a_4, \ldots, a_m$ sont linéairement rationnellement indépendants). Je prouverai que la sphère

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - a_i)^2 = c + \sum_{i=3}^{m} a_i^2 \tag{2}$$

satisfait à notre théorème.

En effet, il résulte de l'équation (2) que

$$2 \sum_{i=3}^{m} a_i x_i = (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \sum_{i=3}^{m} x_i^2 - c = d\,.$$

Donc, si les nombres x_i $(i = 1, 2, ..., m)$ sont entiers, le nombre d est rationnel et il résulte de la définition des nombres a_3, a_4, ..., a_m que $x_3 = x_4 = ... = x_m = 0$. L'équation (2) devient donc l'équation (1) qui, comme nous savons, a précisément n solutions en nombres entiers x_1, x_2. L'équation (2) a donc précisément n solutions en nombres entiers $x_1, x_2, ..., x_m$, c.q.f.d.