

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 5 (1959)
Heft: 3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SPECIAL CASE OF KUMMER'S CONGRUENCE
Autor: Carlitz, L.

Bibliographie
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-35487>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 07.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

As in the case n even, it will suffice to take $r \equiv 3 \pmod{4}$. Let 2^{e_r} denote the highest power of 2 dividing $r + 1$, and consider $2^{-e_r} T$. For $e_r \leq 2$, we get the exponent -1 ; for $e_r \geq 3$ it follows that $\frac{1}{2}(r - 1) \geq e_r$. Hence if $k + 2 < e_r$, we get the exponent $k + 2 - e_r$, while if $k + 2 \geq e_r$ we again get -1 (at most). Consequently

$$\Delta_n \equiv 0 \pmod{2^{3n-e+k+2}} \quad (k + 2 < e_r) , \tag{16}$$

$$\Delta_n \equiv 0 \pmod{2^{3n-1}} \quad (k + 2 \geq e_r) . \tag{17}$$

Comparing (16) and (17) with (13) and (14) we may accordingly state the following

THEOREM. *Let $2^e \leq 2n < 2^{e+1}$ and let 2^k denote the highest power of 2 dividing n or $n - 1$ according as n is even or odd. Then Δ_n as defined by (1) and (3) satisfies (16) and (17). Applying the Staudt-Clausen theorem, it follows from (3)*

that

$$p\Delta_n \equiv - \sum_{r>0} (-1)^{n-rm} \binom{n}{rm} \pmod{p} ,$$

where $p = 2m + 1$ is an odd prime. It can be shown that

$$\sum_{r>0} (-1)^{n-rm} \binom{n}{rm} \equiv \begin{cases} 2 & (p - 1 \mid n) \\ \binom{m}{k} & (p - 1 \mid n + k, 0 < k \leq m) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In particular the prime factors of the denominator of Δ_n are simple and cannot exceed $2n + 1$.

In connection with formula (4) above it may be of interest to cite the formula [2, p. 189]

$$(-1)^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \frac{B_{n+r+1}}{n+r+1} + \frac{n! n!}{2(2n+1)!} = 0 .$$

REFERENCES

1. G. FROBENIUS, *Über die Bernoullischen Zahlen und die Eulerschen Polynome*, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1910), pp. 809-847.
2. N. NIELSEN, *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli*. Paris, 1923.
3. N. E. NÖRLUND, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*. Berlin, 1924.
Duke University.