

# SUR QUELQUES PRINCIPES EXTRÉMAUX DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Autor(en): **Hersch, Joseph**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1959)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-35495>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR QUELQUES PRINCIPES EXTRÉMAUX DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE <sup>1)</sup>

par Joseph HERSCH, Institut Battelle, Genève

(Reçu le 25 octobre 1959.)

## 1. INTRODUCTION.

Je voudrais attirer votre attention sur quelques aspects de deux problèmes de physique mathématique: le *problème de Dirichlet* et celui de la *fréquence fondamentale d'une membrane vibrante*. Il s'agira surtout des principes extrémaux liés à ces problèmes.

### 1. 1. Un problème de Dirichlet.

Nous considérons la solution  $\varphi(x, y)$  du problème aux limites (fig. 1):

$$\Delta\varphi = 0 \text{ dans } G; \quad \begin{array}{l} \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \varphi = 1 \text{ sur } \Gamma_1 \end{array};$$

nous nous intéressons particulièrement à l'intégrale de Dirichlet

$$D(\varphi) = \iint_G \text{grad}^2 \varphi \, dx dy .$$

Cette grandeur peut être évaluée dans les deux sens à l'aide des deux principes suivants:

*Principe de Dirichlet:*

Soit  $\varrho(x, y)$  une fonction continue et lisse par morceaux dans  $G$ , et telle que

$$\begin{array}{l} \varrho = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \varrho = 1 \text{ sur } \Gamma_1 \end{array};$$

alors  $D(\varphi) \leq D(\varrho)$ .

*Principe de Thomson:*

Soit  $\vec{p}(x, y)$  un champ vectoriel dans  $G$ , sans sources:  $\text{div } \vec{p} = 0$ ; alors

$$D(\varphi) \geq \frac{\left( \oint_{\Gamma_1} \vec{p} \cdot \vec{n} \, ds \right)^2}{\iint_G \vec{p}^2 \, dx dy} .$$

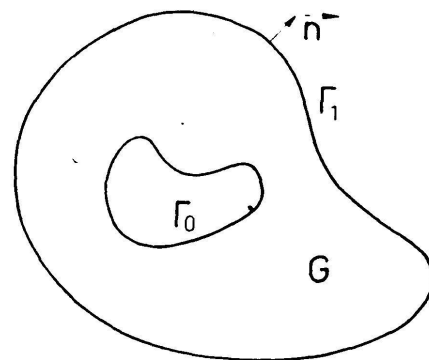


Fig. 1

<sup>1)</sup> Leçon inaugurale à l'École polytechnique fédérale (Zurich), le 31 janvier 1959.

1. 2. *La vibration fondamentale d'une membrane.*

Dans un domaine  $G$  de contour  $\Gamma$ , nous cherchons un nombre positif  $\lambda_1$  et une fonction  $\varphi(x, y)$  deux fois continûment dérivable, tels que  $\Delta\varphi + \lambda_1\varphi = 0$  et  $\varphi > 0$  dans  $G$ ,  $\varphi = 0$  sur  $\Gamma$ .

$\sqrt{\lambda_1}$  est la fréquence fondamentale,  $\varphi$  la première fonction propre.

*Principe de Rayleigh:*

Soit  $\varphi(x, y)$  une fonction continue et lisse par morceaux dans  $G$ , qui s'annule sur  $\Gamma$ ; alors

$$\lambda_1 \leq R[\varphi] = \frac{D(\varphi)}{\iint_G \varphi^2 dx dy}$$

*Existe-t-il un principe « du type Thomson » ?*

$$\lambda_1 \geq ?$$

2. LA CONDUCTIBILITÉ ÉLECTRIQUE  
D'UNE PLAQUE HOMOGÈNE.

Considérons le domaine  $G$  (fig. 1) comme une plaque homogène de résistance spécifique  $\rho = 1$ , bordée par deux électrodes  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$ ; appelons  $\varphi(x, y)$  le potentiel au point  $(x, y)$ ; on impose les potentiels 0 sur  $\Gamma_0$  et 1 sur  $\Gamma_1$  (différence de potentiel  $V = 1$ ). Comme  $\rho = 1$ , on a la densité de courant  $\vec{i} = \text{grad } \varphi$ ; la conservation de la charge s'exprime par  $0 = \text{div } \vec{i} = \Delta\varphi$ . On voit donc que le potentiel  $\varphi$  est la solution du problème de Dirichlet du § 1. 1.

Comme  $\rho = 1$  et  $V = 1$ , la chaleur de Joule dégagée par seconde est

$$J = \iint_G \vec{i}^2 dx dy = D(\varphi) = \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \oint_{\Gamma_1} \vec{i} \cdot \vec{n} ds = I,$$

où  $I$  désigne l'intensité totale et  $\vec{n}$  la normale extérieure.

La résistance totale est

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{I}.$$

3. UNE INTERPRÉTATION DU PRINCIPE DE DIRICHLET.

3.1. Modifions le problème physique du § 2 en introduisant dans le domaine  $G$  des conducteurs parfaits  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$  (fig. 2). J'écrirai  $\gamma_0 = \Gamma_0, \gamma_n = \Gamma_1$ . Cette modification provoque évidemment une augmentation de l'intensité. *Quand l'intensité est-elle inchangée?* Lorsque aucun courant ne parcourt les conducteurs  $\gamma_i$ , c'est-à-dire si toutes les courbes  $\gamma_i$  sont des lignes de niveau de  $\varphi$  (§ 2).

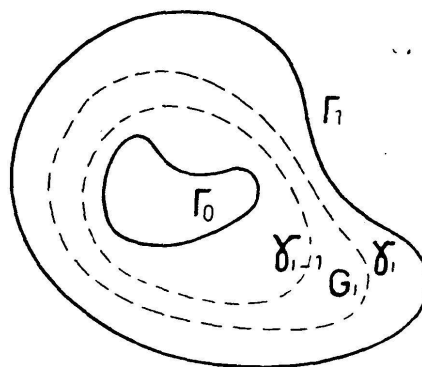


Fig. 2

Appelons  $u(x, y)$  le potentiel pour le problème modifié,  $\bar{I}$  l'intensité et  $\bar{J}$  la chaleur de Joule dégagée par seconde. On a  $u = \text{const} = u_i$  sur la courbe  $\gamma_i$ ; dans chaque bande  $G_i$  (entre  $\gamma_{i-1}$  et  $\gamma_i$ ),  $u(x, y)$  s'obtient à partir de  $u_{i-1}$  et  $u_i$  en résolvant un problème de Dirichlet ( $i = 1, 2, \dots, n$ ); les inconnues  $u_1, \dots, u_{n-1}$  sont déterminées par les  $n - 1$  conditions de conservation de la charge:

$$\text{Flux à travers } G_i = \text{Flux à travers } G_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1).$$

On a encore  $\bar{J} = V \cdot \bar{I} = \bar{I}^2$ , donc

$$D(\varphi) = J = I \leq \bar{I} = \bar{J} = D(u).$$

Notre plaque se comporte à présent comme un système de  $n$  résistances  $R_i = R_{\gamma_{i-1} \gamma_i}$  connectées en série (fig. 3):

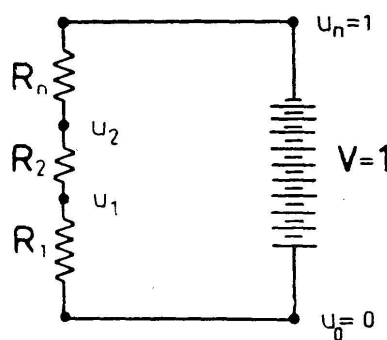


Fig. 3

$$\frac{1}{\bar{I}} = \bar{R} = R_1 + R_2 + \dots + R_n.$$

3.2. Modifions de nouveau le problème physique: Au lieu de laisser des potentiels « naturels »  $u_i$  s'établir librement sur les

conducteurs  $\gamma_i$ , nous imposons des potentiels arbitraires  $\varphi_i$ . En d'autres termes, nous connectons à la batterie toutes les extrémités des résistances partielles  $R_i$  (fig. 4).

Appelons  $\varphi(x, y)$  la solution du nouveau problème physique (obtenue par résolution, dans chaque bande  $G_i$ , d'un problème de Dirichlet), et  $\bar{J}$  la chaleur de Joule maintenant dégagée par seconde.

Il est intuitif que  $\bar{J} \geq \bar{J}$ ; quand a-t-on l'égalité? Lorsque aucun courant ne parcourt les conducteurs ajoutés  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ , c'est-à-dire si les potentiels intermédiaires imposés  $v_i$  sont égaux aux potentiels « naturels »  $u_i$ . La démonstration est simple et repose sur l'inégalité de Schwarz: posons

$$\varphi_i - \varphi_{i-1} = V_i; \quad \sum_1^n V_i = 1;$$

$$\bar{J} = D(\varphi) = \sum_{i=1}^n \frac{V_i^2}{R_i} \geq \frac{(\sum V_i)^2}{\sum R_i} = \frac{1}{R} = D(u) = \bar{I} = \bar{J};$$

on a l'égalité si  $\frac{V_i}{R_i} = \text{const}$ , c'est-à-dire si l'intensité est la même dans chaque  $G_i$ : c'est précisément la condition qui, au § 3. 1, déterminait les  $u_i$ . On a donc

$$D(\varphi) \geq D(u) \geq D(\varphi).$$

3. 3. Le principe de Dirichlet exprime précisément l'inégalité  $D(\varphi) \geq D(\varphi)$  dans le cas limite où l'on a imposé toutes les lignes de niveau de  $\varphi$  et leur potentiel, c'est-à-dire lorsqu'on a imposé la fonction  $\varphi$  elle-même<sup>1)</sup>. On n'a l'égalité que si  $\varphi = \varphi$ .

1) A l'aide de toutes les lignes de niveau d'une fonction admissible  $v$ , on peut construire une borne supérieure  $D(u)$  pour  $D(\varphi)$ , meilleure que  $D(v)$ : cf. G. PÓLYA et G. SZEGÖ: *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* (Princeton University Press, 1951), p. 47.

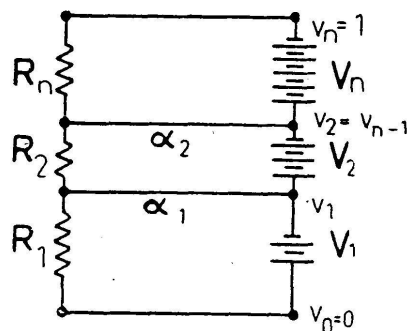


Fig. 4

4. UNE INTERPRÉTATION DU PRINCIPE DE THOMSON.

4.1. Modifions d'une autre façon le problème physique initial (§ 2): Découpons en lanières  $G_j$  la plaque homogène (fig. 5).

Ce découpage provoque évidemment une diminution de l'intensité. Quand l'intensité est-elle inchangée? Lorsque, initialement, aucun courant  $\vec{i} = \text{grad } \varphi$  ne traversait les coupures, c'est-à-dire si toutes les coupures sont des lignes de flux de  $\text{grad } \varphi$  (§ 2).

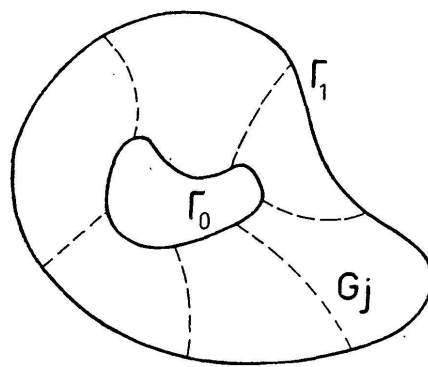


Fig. 5

Appelons  $\omega(x, y)$  le potentiel pour le problème modifié,  $\tilde{I}$  l'intensité totale et  $\tilde{J}$  la chaleur

de Joule dégagée par seconde. On a  $\omega = 0$  sur  $\Gamma_0$ ,  $\omega = 1$  sur  $\Gamma_1$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0$  sur les coupures,  $\Delta \omega = 0$  dans chaque  $G_j$ .

On a encore  $\tilde{J} = V \cdot \tilde{I} = \tilde{I}$ , donc  $D(\varphi) = J = I \geq \tilde{I} = \tilde{J} = D(\omega)$ .

Notre plaque se comporte à présent comme un système de résistances  $R_1, R_2, \dots, R_m$  connectées en parallèle:

$$\tilde{I} = \sum_{j=1}^m \tilde{I}_j = \sum_{j=1}^m \frac{1}{R_j} \quad (\text{car } V = 1).$$

Appelons  $\omega_j$  la restriction de  $\omega$  à  $G_j$ ;

$$\tilde{J}_j = D(\omega_j) = \int_{\Gamma_{1j}} \frac{\partial \omega_j}{\partial n} ds = \tilde{I}_j,$$

où  $\Gamma_{1j}$  est la partie de  $\Gamma_1$  qui borde  $G_j$ .

4.2. Considérons le cas limite où les lanières  $G_j$  sont de largeur infinitésimale. Le découpage de  $G$  est alors équivalent à un choix des lignes de flux d'un champ vectoriel. Soit  $\vec{p}$  un tel champ, de divergence nulle; la direction de  $\vec{p}$  est déterminée en

tout point; sa grandeur  $p = p(s)$  est fonction de l'arc sur la ligne de flux. L'équation  $\operatorname{div} \vec{p} = 0$  est donc équivalente à une équation différentielle *ordinaire*, linéaire et *homogène*, pour  $p(s)$ ; une solution est  $\operatorname{grad} \omega$  (c'est-à-dire:  $\operatorname{grad} \omega_j$  dans la bande infinitésimale  $G_j$ ); donc, dans  $G_j$ ,  $\vec{p} = t_j \operatorname{grad} \omega_j$  ( $t_j$  est constante dans  $G_j$ ). Il s'ensuit, par l'inégalité de Schwarz, que

$$\frac{\left( \oint_{\Gamma_1} \vec{p} \cdot \vec{n} ds \right)^2}{\iint_G \vec{p}^2 dx dy} = \frac{\left[ \sum_j t_j D(\omega_j) \right]^2}{\sum_j t_j^2 D(\omega_j)} \leq \sum_j D(\omega_j) =$$

$$= D(\omega) = I \leq I = J = D(\varphi),$$

nous avons donc bien une interprétation du principe de Thomson.

5. UN PASSAGE THOMSON  $\longrightarrow$  DIRICHLET,  
à l'aide des lignes de niveau  $\bar{\gamma}$  d'une fonction  $\nu$   
concurrente pour Dirichlet.

Dans le principe de Thomson ci-dessus, normons  $\vec{p}$  en imposant  $\oint_{\gamma} \vec{p} \cdot \vec{n} ds = 1$  pour toute courbe fermée  $\gamma$  séparant  $\Gamma_0$  de  $\Gamma_1$ ; pour ces champs concurrents  $\vec{p}$ , on a

$$D(\varphi) = \operatorname{Max}_{\vec{p}} \left( \iint_G \vec{p}^2 dx dy \right)^{-1}.$$

Admettons maintenant davantage de champs concurrents: imposons la condition  $\oint_{\bar{\gamma}} \vec{p} \cdot \vec{n} ds = 1$  pour les seuls lignes de niveau  $\bar{\gamma}$  de  $\nu$ ; le maximum devient plus grand, et nous avons

$$D(\varphi) \leq \operatorname{Max}_{\vec{p}} \left( \iint_G \vec{p}^2 dx dy \right)^{-1};$$

on peut montrer que le maximum à droite est maintenant égal à  $D(u)$  (cf. § 3. 1), donc  $D(\varphi) \leq D(u) \leq D(\nu)$ , et nous retrouvons bien le principe de Dirichlet.

6. UN PASSAGE DIRICHLET  $\longrightarrow$  THOMSON,  
à l'aide des lignes de flux d'un champ vectoriel  $\vec{p}$   
concurrent pour Thomson.

Partageons le domaine  $G$  en lanières  $G_j$  par des lignes de flux  $\kappa$  de  $\vec{p}$ , comme au § 4. 1; dans le principe de Dirichlet (§ 1. 1)

$$D(\varphi) = \text{Min}_{\varphi} D(\varphi), \varphi \text{ continue dans } G, \text{ lisse par morceaux} = \begin{cases} 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ 1 \text{ sur } \Gamma_1, \end{cases}$$

admettons maintenant à concurrence également les fonctions  $\tilde{\varphi}$  discontinues le long des coupures  $\kappa$ ; c'est-à-dire que nous exigeons seulement la continuité dans chaque lanière  $G_j$ : le minimum diminue évidemment et l'on a

$$D(\varphi) \geq \text{Min}_{\tilde{\varphi}} D(\tilde{\varphi}).$$

Soit  $\tilde{\varphi}_j$  la restriction de  $\tilde{\varphi}$  à  $G_j$ , et soit de nouveau  $\omega_j$  la solution du problème mixte dans  $G_j$ :  $\omega_j = 0$  sur  $\Gamma_{0j}$ ,  $\omega_j = 1$  sur  $\Gamma_{1j}$ ,  $\frac{\partial \omega_j}{\partial n} = 0$  sur les coupures  $\kappa$ .

$$\text{Min}_{\tilde{\varphi}} D(\tilde{\varphi}) = \sum_j \text{Min}_{\tilde{\varphi}_j} D(\tilde{\varphi}_j) = \sum_j D(\omega_j) = \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = D(\omega),$$

comme au § 4. 1; pour des lanières  $G_j$  de largeur infinitésimale, on retrouve, comme au § 4. 2, le principe de Thomson:

$$\frac{\left( \oint_{\Gamma_1} \vec{p} \cdot \vec{n} ds \right)^2}{\iint_G \vec{p}^2 dx dy} \leq D(\omega),$$

donc  $\leq D(\varphi)$  en vertu de ce qui précède.

7. UN PAS VERS UN PRINCIPE DE THOMSON  
POUR LA MEMBRANE VIBRANTE.

7. 1. Cherchons à réaliser, pour le problème de la membrane vibrante (§ 1. 2), un passage analogue à celui du § 6; à



présent: « *de Rayleigh à Thomson* ». Pour cela, partageons le domaine  $G$  du § 1.2 en sous-domaines  $G_j$  (fig. 6).

Dans le principe de Rayleigh

$$\lambda_1 = \text{Min}_{\varphi} R[\varphi], \quad \varphi \text{ continue dans } G, \\ \text{lisse par morceaux, } = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

nous voulons maintenant admettre également à concurrence les fonctions  $\tilde{\varphi}$  discontinues le long des coupures. Le minimum ne peut évidemment que décroître:

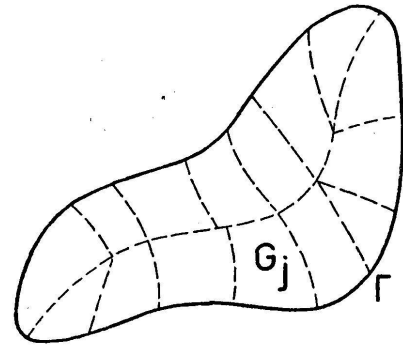


Fig. 6

$$\lambda_1 \geq \text{Min}_{\tilde{\varphi}} R[\tilde{\varphi}];$$

appelons  $\tilde{\varphi}_j$  la restriction de  $\tilde{\varphi}$  à  $G_j$ .

Soient, dans  $G_j$ ,  $\xi_j$  la première valeur propre et  $\omega_j$  la fonction propre correspondante, d'une membrane  $G_j$  liée le long de  $\Gamma_j$ , libre sur les « coupures »; on a  $\Delta \omega_j + \xi_j \omega_j = 0$  et  $\omega_j > 0$  dans  $G_j$ ,  $\omega_j = 0$  sur  $\Gamma_j$ ,  $\frac{\partial \omega_j}{\partial n} = 0$  sur les coupures;  $\xi_j = \text{Min}_{\tilde{\varphi}_j} R[\tilde{\varphi}_j]$ .  
Donc

$$\lambda_1 \geq \text{Min}_{\tilde{\varphi}} R[\tilde{\varphi}] = \text{Min}_{\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_m} \frac{\sum_j D(\tilde{\varphi}_j)}{\sum_j \iint_{G_j} \tilde{\varphi}_j^2 dx dy} = \min_j \xi_j.$$

Si toutes les coupures sont des lignes de flux de grad  $\varphi$  ( $\varphi$  étant la fonction propre fondamentale, cf. § 1.2),  $\omega_j$  est simplement la restriction de  $\varphi$  à  $G_j$  et l'on a, pour tout  $j$ ,

$$\xi_j = R[\omega_j] = \lambda_1$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

$$\lambda_1 = \text{Max}_{\text{découpages de } G \text{ en lanières } G_j} \min_j \xi_j. \quad 1)$$

1) à Voir ce sujet: *C.R. Acad. Sci. Paris*, 248, 1959, p. 2060, où deux applications numériques sont indiquées.

7. 2. Dans le cas limite de bandes  $G_j$  de largeur infinitésimale, on a, dans chaque  $G_j$ , un problème à une seule variable indépendante, car  $\omega_j = \omega_j(s)$ .

Le parallélisme entre ce § 7 et le précédent permet d'interpréter ce résultat comme un pas en direction d'un « principe de Thomson » pour la membrane vibrante. La difficulté reste évidemment le calcul (ou l'évaluation par défaut) de tous les  $\xi_j$ . Peut-on aller au-delà de cette formulation ? La question reste ouverte.