Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 5 (1959)

Heft: 4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES PRINCIPES EXTRÉMAUX DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Kapitel: 2. La conductibilité électrique d'une plaque homogène.

Autor: Hersch, Joseph

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-35495

1. 2. *La vibration fondamentale d'une membrane.*

Dans un domaine G de contour Γ, nous cherchons un nombre positif λ_1 et une fonction $\varphi(x, y)$ deux fois continûment dérivable, tels que $\Delta\varphi + \lambda_1 \varphi = 0$ et $\varphi > 0$ dans G, $\varphi = 0$ sur Γ.

$\sqrt{\lambda_1}$ est la fréquence fondamentale, φ la première fonction propre.

Principe de Rayleigh:

Soit $v(x, y)$ une fonction continue et lisse par morceaux dans G, qui s'annule sur Γ; alors

$$\lambda_1 \leqslant R[v] = \frac{D(v)}{\iint_G v^2\, dxdy} \cdot$$

Existe-t-il un principe « du type Thomson » ?

$$\lambda_1 \geqslant ?$$

2. La conductibilité électrique d'une plaque homogène.

Considérons le domaine G (fig. 1) comme une plaque homogène de résistance spécifique $\rho = 1$, bordée par deux électrodes Γ_0 et Γ_1; appelons $\varphi(x, y)$ le potentiel au point (x, y); on impose les potentiels 0 sur Γ_0 et 1 sur Γ_1 (différence de potentiel $V = 1$). Comme $\rho = 1$, on a la densité de courant $\vec{i} = \operatorname{grad} \varphi$; la conservation de la charge s'exprime par $0 = \operatorname{div} \vec{i} = \Delta\varphi$. On voit donc que *le potentiel φ est la solution du problème de Dirichlet du* § 1. 1.

Comme $\rho = 1$ et $V = 1$, la chaleur de Joule dégagée par seconde est

$$J = \iint_G \vec{i}^2\, dxdy = D(\varphi) = \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, ds = \oint_{\Gamma_1} \vec{i} \cdot \vec{n}\, ds = I,$$

où I désigne l'intensité totale et $\vec{n}$ la normale extérieure.

La résistance totale est

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{I} \cdot$$